

ספר חכמת התכונה

שחיבר החכם השלם התוכן הגדול

ר' רפאל סג"ל מק"ק הנובר

יוצא לאור על פי כתב-יד

אשר בספריית בודליאן באוקספורד

המהדיר והמפרש

יוסף יצחק איידלר

מהנדס אזרחי

בריסל-בלגיה

מחבר הספר הלכות קידוש החודש על-פי הרמב"ם
תשע"ג

Treatise of Astronomy

by

Raphael Levi of Hanover

Edited from a Manuscript

In the Bodleian Library of Oxford

Edited and Commented by

Ir. J. Jean Ajdler
Civil Engineer
Brussels-Belgium
2013

Introduction.

Raphael Levi from Hanover (1685-1779) was considered in his time as an exceptional mathematician and astronomer and a very skilful calculator. He was known as the author of two books written in Hebrew and published at about the same time in 1756. The first is his *Luhot ha-Ibbur*, in fact two books printed separately, at one year interval. It is a remarkable book written in an elegant Hebrew, printed in very nice characters. It is however difficult to understand because of the absence of a third part which was never printed, which was intended to explaining and justifying the two first parts.

A second book of Hanover was edited without his authorization by Rabbi Moses of Tiktin who bought the manuscript from one of Hanover's pupils in a public auction. This book, even if it has not the formal perfection that Hanover had required before its printing, has the merit to expound clearly the understanding of Maimonides' famous treatise *Hilkhot Kiddush ha-Hodesh* by Hanover. The book gives mainly a qualitative description of Maimonides' methods and concepts and a clear definition of different astronomical parameters adopted by Maimonides; it allows a reader not familiar with the ancient astronomy to get acquainted with it. And I, indeed, personally used and studied it before trying to understand Ptolemy and al-Battani. At the end of this book, astronomical tables are gathered and it appears that the author adopted his epoch in the year 1730; this date is probably close to the date of composition of this book.

We present here a third book still in manuscript in the Bodleian Library under the n° 2063 in A. Neubauer's Catalogue of the Hebrew manuscripts in the Bodleian Library, Oxford 1886-1908 and Oxford Mich 498 or Ox Mich 301 (old numerotation). The manuscript includes 45 folios: one folio is the title page then 24 folios, i.e. 48 pages are devoted to the text of the manuscript. The last 20 folios correspond to 20 figures illustrating the main text. In the present edition of the manuscript we propose in an appendix two facsimiles of two pages of the manuscript showing the nature of the difficulties met in the deciphering of the manuscript: erasures, repetitions, omissions, marginal additions in order to correct omissions, unreadable letters along the internal border of the pages because of the impossibility of a complete opening of the booklet and mistakes in the transcription of numbers expressed in Hebrew characters. These two facsimiles are followed by the facsimiles of the 20 figures necessary to follow the main text.

The present book does not revolutionize our knowledge about the understanding of Maimonides' *Hilkhot Kiddush ha-Hodesh* but it allows us to fully understand Hanover's methods of calculation of the moon's visibility according to the conception of the ancient astronomy (the astronomy of Ptolemy). In this field, Hanover was favored by still being on the bridge between the ancients and the moderns. His education still gave him full understanding of the model of ancient astronomy, without an irksome study of ancient books. His deep mathematical culture, including the new notions of calculus learned under Leibnitz, gave him the necessary tools to be the first to perform a complete study of the visibility of the new moon, determination of true conjunctions and *tekufot*. We have no precise data about the date of the composition. However the use in his

calculations of an epoch in 1725 would lead us to assume a date of composition around that period. It could be then the oldest of all his books. The author was convinced that the mastery of the subject requires the ability to perform the complete practical calculations of the phenomenon under analysis. The present book was a practical instruction manual supporting his oral teaching. It is, for this reason, very similar to the spirit of his *Luhot ha-Ibbur*. Both are practical books explaining the *How* and not the *Why*.

Another book, intended to answer this last question, was put as reference many times in the present manuscript and in the introduction to *Luhot ha-Ibbur*. Unfortunately it could not be found.

Probably because of the high requirements of the author, our book would never be published, just as this third part of *Luhot ha-Ibbur*. In his *Lukhot ha-Ibbur*, the author presented easy to use improved tables. In the present manuscript he performs all the complete and detailed calculations “as a professional astronomer would make them”. This is of course of the highest importance to understand his methods of calculation. We can now imagine what this book would have been. When we compare Hanover’s methods of calculation with those of E. Baneth in Maimuni’s *Neumondberechnung* (1898, 1899, 1902 and 1903) we are struck by the similitude and even the identity of the methods. The only difference is the scholarly aspects of Baneth’s work and study of the ancient texts. This explains the interest of Hanover’s manuscript in the history of the study of Maimonides’ *Hilkhot Kiddush ha-Hodesh*.

If our assumption that the present manuscript was written in about 1725 is correct, thus still during the life of Newton and only 38 years after the edition of the *Principia*, only seven years after the death of Flamsteed and 53 years after the publication of *De Inaequalitate Dierum Solarium*, then it is very likely to assume that the old astronomy of Ptolemy was still taught in the European universities and that it was exactly the astronomical model described in his book. The parameters of this model are very similar to those of al-Battani (slightly different from that of Ptolemy) but it includes some new parameters that were unknown by the ancients.¹ They allow calculating the distance of the earth from the moon, 1238 and from the sun 273633, giving a ratio of 221, still different than the modern value. Indeed the parallax of the moon is, on average, 57’ (this figure was already known by Ptolemy) and according to modern astronomy the parallax of the sun is 8.794’’; this gives a ratio of 388.9.

Hanover mastered the spherical astronomy and all its concepts. He attached much importance to the concept of the equation of time. Hanover adopted the new theory of Flamsteed, although it was not much older than that of Newton. The great difference in Hanover’s attitude with regard to these two theories is the following: the theory of Newton was a revolutionary theory that had to be completed and perfected until it could assert itself; it was like a relativity theory appearing in the ancient landscape. By contrast the concept of the equation of the time was an ancient concept familiar to Ptolemy and al-Battani that was misunderstood and disputed in the 16th and 17th centuries. Flamsteed proposed a new and definitive presentation of the concept and Hanover adopted it immediately. Apparently Hanover did not know the works of the ancients, Ptolemy and al-Battani, in the text and he gives the impression that he was probably not aware of their understanding of the *equation of the days*. He was however a well-read, cultured and

¹ The distance between the center of the earth and the center of the deferent is fixed to 9730 and the radius of the earth is fixed to 20.47.

curious man who, as we learn from another of his manuscripts, the third one, visited the library of the Gaon of Prague – R. David Oppenheim – (in Hanover at this period, before becoming the nucleus of the Bodleian Library) and even the Royal Library in Paris. This leads to an anachronistic situation: Hanover, on the one hand, developed in this book a model based on ancient astronomy but on the other hand he adopted the new theory of the equation of time of Flamsteed. In fact this was probably the general scientific position at that time: Flamsteed had conceived his equation of time before the new theory of Newton when he was still using the model of the ancients, despite all its weak points. The theory of Flamsteed asserted itself in the scientific community far before the Newtonian astronomy. However this anachronistic attitude of Hanover remains incomprehensible. Indeed, the almanachs of this period, the first half of the eighteenth century, and notably the famous “*Connaissance des Temps*” gave the table of the equation of time according to the new theory of Flamsteed and the table of the equation of the clocks according to the ancient conception preceding Flamsteed. Hanover could thus certainly not be unaware of this fact that the ancients calibrated their mean time differently and it remains a conundrum why he did not raise this issue and how he could propose that the epoch of Maimonides was at 6h 20m p.m. modern mean time. This statement is in fact an absurdity as Maimonides could not even have imagined our modern mean time.

Raphael Levi had the reputation of an extraordinary skilled calculator. We discover in the present book that he used logarithmic tables of the numbers, sine and tangent, with seven exact decimals, allowing very precise calculations. We know also that he championed the use of logarithms in commercial and banking calculations (see his book in German on the subject: *Vorbericht vom Gebrauch der neuerfundenen logarithmische Wechsel-Tabellen...* verfertigt und Hrsg von Raphael Levi, Hannover 1747).

In the field of the trigonometry he used the word בקע for the sine and נוגע for the tangent. He did not use the cosine or the cotangent and would use, instead, the sine or the tangent of the complement. He used mainly the sine–formula and the derived tangent–formula in the plane triangles; similarly he used mainly the sine–formula in the spherical triangles and the different formulas of the spherical rectangular triangles. Normally the formulas of Trigonometry are valid in size and sign. However, Hanover seems not to rely on the knowledge of his pupils and he feels obliged, to explain lengthily, at each occasion, the rules of sign of each operation. This is rather embarrassing and disturbing for the modern reader who prefers a general formula.

In the field of the spherical astronomy, we note that he mastered the subject and knew the formulas of transformation between the horizontal, equatorial and ecliptic coordinates based on the fundamental formula of the spherical trigonometry. He did not know the sidereal time $T_s = \alpha + H$ but he used the correlated oblique setting $\alpha + \Delta$ and the oblique rising $\alpha - \Delta$, with $H = 90^\circ + \Delta$. Again these formulas are valid in size and signs, but Hanover felt obliged to detail in length and detail. Similarly Hanover did not use the azimuth Az but he used the quantity $w = Az - 90^\circ$ representing the distance from the middle western point W or from the middle eastern point E.

Hanover, as a pupil of Leibnitz, mastered calculus and introduced the notion of differential calculation, more exactly finite differential calculation, into the ancient astronomical model. Indeed the calculation of two true positions of a body for two consecutive mean longitudes of l_b and l_b+1° allows calculating the true displacement of the celestial body when its mean displacement is 1° . This allows calculating the true celerity of the celestial body with regard to its mean celerity. Hanover made use of this feature to improve the calculation, according to the ancient model of astronomy, of the true conjunctions, the true oppositions, the eclipses and the tekufot with a precision that was never reached before. Hanover claims clearly the originality of this procedure. It is certain that in the field of Jewish astronomy, this was a justified claim. It is however likely that this procedure was used in parallel, and probably before him, by professional astronomers of the most advanced countries of Europe.

Hanover introduced in the present book an original criterion of visibility of the new moon. He affirmed that the new lunar crescent is visible if the central angle of the lightened moon d is 5° corresponding to the illuminated fraction k of the disk of the moon $k = (1 + \cos E) / 2 = \cos^2 E/2 = 0.019$ with $E = 180^\circ - d$.

We note however, that he made a judgment mistake and considered that the angle of the illuminated part of the moon depends on the apparent altitude of the moon when in reality it depends on the geocentric elongation E between moon and sun (arc of light of the ancients). We note also that this criterion would be in contradiction with the observations of Danjon. According to the latter, the new crescent is not visible as long as the angle d is less than 7° (see Danjon; *Astronomie Générale*, Paris 1958 and 1986, p. 348).

Furthermore when we examine the modern criteria of visibility, that of Fotheringham and the Indian criterion, giving Δh in function of ΔAz , the difference of altitude between moon and sun in function of their difference of azimuth, we must ascertain that the elongation between sun and moon, is not a constant and depends on the relative values of Δh and ΔAz . Therefore, it does not seem that the fixed value of angle E can offer a good criterion of visibility. Of course Hanover could not know all these new elements and his idea was certainly original.

His language is very clear and precise and it is in this respect much clearer than that of ancient Jewish astronomers and modern Jewish astronomers of his time. One point is however disturbing: as the Jewish rabbinical authors of that time, he did not pay attention to the gender of the words and mixed cheerfully masculine gender and feminine gender of a word, even in one sentence.

In any case the present book allows restoring to life the calculation methods and the way of thinking of a great personality of the Jewish Nation at the end of the old regime. He had succeeded to impose the respect not only of his fellow Jews but also of his non Jewish contemporaries, as indicated on his epitaph.

Notations.

() text in brackets in the original text.

[corrected] (erroneous) according to my opinion.

[] text proposed when the original was absent, unreadable or hidden by the internal margin.

Brussels.

15 Av 5770.

Revision of the first edition.

Dr. Weiss of Bnei Berak, PHD mathematics decided in 2012 to study spherical astronomy through the text of Hanover's חכמת התכונה. During his study he asked countless queries and formulated many objections, addressing the smallest details. These discussions and exchanges allowed us correcting different misprints and mistakes and improving the explanatory notes. Especially his different suggestions of corrections facilitated my work.

Brussels.

1 Shevat 5773.

ספר חכמת התכונה

שחיבר החכם השלם התוכן הגדול

ר' רפאל סג"ל מק"ק הנובר

א.

הבט נא השמימה וראית השמש והירח וכל צבא השמים מתנוצצים והולכים ומתגלגלים סביב הארץ ממזרח למערב ומקיפים אותה במשך זמן כ"ד שעות. כי עיניך הרואות ראייה מוחשת הלוא לנוכח יביטו כי כל כוכב מן הכוכבים זורח ועולה בפאת מזרח ומתגלגל והולך ממזרח למערב ויחזור והשוב אל מקומו הראשון במשך זמן כ"ד שעות. ולפי שמשפט אחד הוא לכל כוכב וכוכב להקיף סביבות הארץ מסיבה שלימה במשך זמן כ"ד שעות,² לכן הסכימו כל בעלי התכונה הקדמונים לומר שיש גלגל אחד המקיף את כל הארץ בתנועת העצמית ב-כ"ד שעות והגלגל ההוא מכריח כל שאר הגלגלים (עם הכוכבים הקבועים בהם) להתנועע עמו ממזרח למערב בתנוע הכריחית ואותו הגלגל המכריח נקרא אצל בעלי התכונה גלגל היומי לפי שסבבו העצמי הוא ביום אחד.

ב.

וחכמי התכונה הסכימו כי כל גלגל וגלגל נחלק ל-ש"ס חלקים והחלקים ההם קראו בשם מעלות וכל מעלה חלקו לששים חלקים אשר קראו בשם דקים וכל דק חלקו עוד לששים חלקים אשר קראו בשם שניים. גם חלקו כל שניה לששים שלישיים וכן לרביעיים ולחמישיים או יותר כאשר רצו לדקדק בהם בחשבון דק. גם

² 24 sidereal hours corresponding to 23h 56m 04 s mean time.

הסכימו שהיום נחלק ל-כ"ד חלקים אשר נקראו בשם שעות וכל שעה תהיה נחלקת עוד לששם חלקים אחרים הנקראים בשם דקים. גם כל דק נחלק לששם חלקים ונקראים שניים וכן תוכל לחלק עוד כאשר ייטב בעיניך. והסכימו עוד שהעולם כולו הוא עגול ככדור והארץ (שהוא מקום הראות אשר בני אדם עומדים עליו ומשם תצא הראייה) מונחת באמצע העולם וכדי לקרב התנוע השמימית אל הציור הדמיוני, הניחו כאילו יהיה בריח אחד בתוך הגלגל, המברית אותו מן הקצה אל הקצה וקראוהו בשם בריח העולם.³ וכאילו הגלגל מתנועע סביב הברית ההוא. וקצות הברית נחים ושוקטים והם נקראים צירי הגלגל או קוטבי העולם.⁴ גם הניחו אופן באמצע הכדור והוא גלגל עובר ממזרח למערב, בין שני הקוטבים האלה, בריחוק שווה מכל צד וקראו אותו אופן המישור או גלגל משוה היום.⁵

ובגלגל הזה מודדים השעות לפי שזה הגלגל כולו, המחזיק ש"ס מעלות, מתנועע להקיף הארץ ב-כ"ד שעות. הנה כפי זה יהיה מספר המעלות המתנועעים בשעה אחת חמש עשרה מעלות. ובעבור שגלגל הזה עובר ממזרח למערב ומחלק את הכדור כולו לשני חלקים שווים, חלק אחד הוא לפאת צפון מזה הגלגל והשני לפאת דרום, לכן גם הקוטב שהוא בחלק הצפוני נקרא קוטב הצפוני ואשר הוא בחלק הדרומי נקרא קוטב הדרומי. וברוב הסתכלות העיון מצאו כי כל הכוכבים ובמאורות רשמים רשם דמיוני בהקפתם היומיות כעין קוים עגולים הנקראים מסיבות היומיות. והנה המסיבות וההקפות האלה הן מקבילות ונוכחיות לקו משוה היום, רצוני לומר, שיש ביניהם מרחק שווה מכל צד.⁶

ג.

וכדי לדמות בדעתנו מהלך כל כוכב וכוכב וגבהו ועלייתו ושקיעתו ולצייר הדברים האלה היטב בדמיונו ולקבוע אותם ברעיונות, לכן היניחו גם בארץ, כאילו קו עגול עובר עליה ממזרח למערב ומקיף כל הכדור ההוא וקראוהו בשם קו השוה⁷ והוא מכוון תחת קו משוה היום אשר בשמים. גם הניחו בדמיונם כאילו היו שני קוטבים בארץ,⁸ שהם מכוונים נוכח קטבי הרקיע.⁹ וכל נקודה שהיא בשטח גבנונית הארץ, המתרחקת מן הקו השוה לצפון או לדרום, הנה המרחק ההוא נקרא רוחב המדינה.¹⁰ ומספר מעלות מרחק הנקודה ההיא מן הקו השוה, הוא מספר מעלות רוחב המדינה. וכל נקודה שהיא עומדת על קו השוה עצמו, ואינה נוטה ממנה לצפון או לדרום, נאמר עליה שאין לה רוחב לפי שהקו השוה הוא המקום שמשם מתחילים למדוד רוחב המדינה.

ד.

וליהיות כי כיפת השמים מקפת את ארץ מכל צדדיה והאדם העומד על הארץ בכל מקום שהוא, ידמה בעיונו כאילו הוא עומד בטיבור הארץ¹¹ ובאמצעותה ועיניו תראינה חצי כיפת הרקיע¹² למעלה משטח הארץ. וידמה בנפשו כאילו לקצות הארץ יביט היכא דנשקי שמיא וארץ בהדי הדדי. הנה אותו העיגול הגדול (המפריש לעין בין חצי הרקיע הנראה לנו ובין חצי הרקיע הנסתרת מעינינו תחת הארץ) נקרא אופן המפריש או אופן.¹³ והאופן הזה ינוח במקומו ובו נרשום עליית הכוכבים ושקיעתם. כי כאשר נראה כוכב מן הכוכבים במזרח, אשר קודם לכן היה נעלם מראות עינינו, נאומר עליו כי הכוכב ההוא עולה במזרח. וכן כאשר נראה כוכב מן

³ The axis of the celestial sphere.

⁴ The celestial poles.

⁵ The celestial equator.

⁶ Celestial parallels.

⁷ Earthly equator.

⁸ Earthly poles.

⁹ The celestial poles

¹⁰ The geographical latitude.

¹¹ The center of the earth.

¹² The celestial sphere.

¹³ The horizon.

הכוכבים בפאת מערב ואחר זמן מה לא נראה עוד, נאמר עליו כוכב פלוני שוקע במערב. וכל מדינה ומדינה יש לה אופק בפני עצמו, זולת מדינה אחרת כי האופקים משתנים כפי שינוי מצב האנשים. ולהיות כי לכל אופק ואופק יהיו קוטבים מיוחדים והן הנקודות שהן בתכלית המרחק מאופן המפריש. ומרחקן מן האופן הזה הוא מרחק שווה מכל צד, והן נקודות נוכח הראש¹⁴ והרגל¹⁵, רצוני לומר כאשר תדמה נקודה אחת למעלה, נוכח ראשך ותדמה עוד נקודה אחת למטה נוכח רגליך. הנה שתי הנקודות האלה הן קוטבי אופן המפריש.¹⁶ ולפי שהאופקים משתנים כשינוי מצב האנשים בכל מדינה ומדינה, נמשך מזה כי גם נקודות נוכח הראש והרגל משתנות כשיעור שינוי האופקים.

ה.

ועדיין צריכין אנחנו לצייר בדמיונו כאלו אופן אחד נטוי בשמים מצפון לדרום ועובר על שני קוטבי העולם ועל נקודת נוכח ראשו בכל אופק ואופק אשר אנחנו עומדים שם והעיגול נקרא אופן חצי היום,¹⁷ לפי שהוא אמצעי בין מזרח ומערב. כי האופן הזה מחלק את הכדור השמימי לשני חלקים שווים. החלק האחד הוא החלק המזרחי והחלק השני הוא החלק המערבי. וכאשר יפגע כוכב מן הכוכבים באחד מנקודות האופן הזה, יהיה במקום הממוצע שבמסיבה היומית או תאמר שהוא במקום האמצעי שבין נקודת הזריחה והשקיעה. וכאשר יהיה השמש באחת מנקודות האופן הזה תהיה עת חצי היום ממש. והאופן הזה נחתך עם אופן משוה היום בשתי נקודות נוכחיות, האחת למעלה מאופן המפריש והשנית למטה מאופן המפריש ונחתכים זה עם זה בדרך זווית ניצבת במשפט שני עגולים גדולים החותכים זה את זה באמציעותם וכל אחד עובר על קוטב השני. כי במו שאופן חצי היום עובר על קוטבי העולם שהם קוטבי משוה היום כך אופן משוה היום עובר על קוטבי חצי היום שהם באמצע המזרח והמערב. גם אופן חצי היום נחתך עם אופן המפריש בשתי נקודות נוכחיות בדרך זווית ניצבת, כי כל אופן מאופני חצי היום יהיה באיזה אופק שיהיה עובר על שני קוטבי העולם ועל שני קוטבי האופק. ובעבור שאופן חצי היום עובר על שני קוטבי האופק וקוטבי האופק משתנים כפי שמי המדינה באורך וברוחב, אם כן גם אופן חצי היום משתנה, עד שיש לכל מדינה ומדינה אופן חצי היום בפני עצמו. ובאופן הזה מודדים גובה כל כוכב בהיותו באופן חצי היום והקשת שהוא בין האופק ובין הכוכב הוא גובה¹⁸ הכוכב ההוא. וכן מודדים בו גובה הקוטב שהוא קשת האופן הזה שבין אופק הצפוני ובין הקוטב והוא שווה לרוחב המדינה¹⁹ במו שיתבאר לקמן בצורה א. וכן מודדים באופן זה נטיית²⁰ כל כוכב ממשוה היום, בין לצפון בין לדרום. והוא קשת מאופן חצי היום שבין כוכב מן הכוכבים ובין נקודת משוה היום אשר באופן ההוא.

ו.

וראוי שתדע כי חכמי התכונה הסתכלו היטב בשמש ובירח עד אשר ראו שהשמש שוקע במערב עם כוכב אחד מן הכוכבים ואחרי זמן מצאו שהשמש שוקע עם כוכבים אחרים אשר היו במזרח השמש קודם הזמן ההוא. גם מצאו שהירח עולה היום במזרח עם כוכב אחד מן הכוכבים ואחרי זמן מה עולה עם כוכבים אחרים והכוכב אשר עלה אתמול עם הירח עומד היום במערב הירח ומתרחק ממנו יום אחר יום עד כי אחרי שש"ה ימים בקירוב מצאו שהשמש שוקע עם הכוכב ההוא אשר שקע עמו. גם בתחילת הסתכלותם. גם מצאו שהירח גם

¹⁴ Zenith.

¹⁵ Nadir.

¹⁶ The poles of the horizon.

¹⁷ The celestial meridian.

¹⁸ The altitude.

¹⁹ The geographical latitude.

²⁰ The declination.

הוא עולה עם הכוכב אחרי כ"ז יום בקירוב כאשר עלה עימו בתחילה. ומפני זה הסכימו חכמי התכונה שיהיה גלגל מיוחד לשמש, גם גלגל מיוחד לירח למטה מן הכוכבים ההם. שהם מסבבים בגלגלם תנועה עצמית מן המערב למזרח עד שהשמש משלים תנועת גלגלו ב-שס"ה יום והירח ב-כ"ז יום בקירוב. ותנועתם שהם מתנועעים ממזרח למערב, היא תנועה הכרחית המוכרחת על-ידי תנועת גלגל היומי המסבב את כדור הארץ כולו ביום אחד ובתנועתו ההיא הוא מכריח להניע עמו עוד גלגלים אחרים.

ז.

וכאשר חקרו חכמי התכונה והסתכלו היטב במהלך השמש והירח מצאו כי השמש והירח הולכים הלוך ואורחות עקלקלות²¹ ולא בדרך אחד יצאו כמו שאר הכוכבים הקיימים, השומרים יחס מהלכם בערך משהו היום. המשל בזה, כאשר יהיה כוכב מן הכוכבים הקיימים רחוק ממשוה היום לצפון או לדרום, אזי הוא מסבב מסיבתו ביושר כפי ערך מסיבת משהו היום, ולא ישתנה מרחקו ומסיבתו. אבל יהיה מרחקו ממשוה היום מרחק שווה תמיד²². גם מסיבתו היום כמסיבתו אתמול, וכן יהיה מסיבתו למחר וכן מסיבתו כל יום ויום. לא כן מסיבת השמש והירח כי הם לא יסובבו תמיד על דרך אחד כי פעם עולים והולכים במסילת משהו היום עצמו ופעם עולים והולכים במסילה אחרת ונוטים ממנו לצפון או לדרום. ומפני זה הסכימו חכמי התכונה שגלגל השמש והירח נוטה מגלגל משהו היום לצפון או לדרום. ושני הגלגלים האלה נחתכים עם משהו היום בשתי נקודות הפגיעה שהן ראש טלה²³ וראש מאזנים²⁴. והגלגלים האלה, מהשמש והירח הם מכוונים תחת גלגל המזלות²⁵ בשוה כאילו שלשתם גלגל אחד והוא אשר קראו בשם קו הלקות.²⁶ וכאשר השגיחו בעלי התכונה והסתכלו היטב בשמש והירח הסובבים בגלגל הדומה לגלגל המזלות ומצאו הירח לפני השמש בפאת מערב ואחרי הימים מצאו הירח אחרי השמש בפאת מזרח. הנה אחרי שלשים יום בקירוב הסתכלו בהם עוד ומצאו הירח לפני השמש וכן אחרי איזה ימים מצאו הירח אחרי השמש כאשר היתה הסתכלותם בתחילה בהשקפה הראשונה. ובדרך זה מצאו אותם כל שלשים יום בקירוב עד כלות השנה. ואז מצאו שניהם מחוברים בנקודה אחת מן הגלגל המזלות, כאשר מצאו אותם בהשקפתם הראשונה בתחילת ההסתכלות. וכן הסכימו לחלק גלגל המזלות לשנים עשר חלקים וקראו לכל חלק וחלק מהם על שם צורת הכוכבים העומדים בחלק ההוא. כי יש חלק מהם כוכבים מתדמים לצורת טלה ויש חלק שנמצאו בו כוכבים מתדמים לצורת שור וכן בכל שאר החלקים נמצאו כוכבים מתדמים לאיזו צורה מן הצורות. לכן קראו לכל חלק וחלק על שם הצורה הנמצאת בו מקיבוץ הכוכבים העומדים שם. והכוכבים המתדמים לצורה מן הצורות בכל חלק מן החלקים ההם מתפשטים עד שלשים מעלות באורך²⁷ ומתרחבים כמו עשר מעלה בקירוב. ולפי שהשמש מכוון בהליכתו וסובב תחת אמצעית הכוכבים ההם בכל עת ובכל זמן מבלי שינוי, בעבור זה הסכימו לחלק את גלגל השמש גם כן לשנים עשר חלקים כאלה וקראו גם כן לכל חלק בשם צורת קיבוץ הכוכבים ההם. ואלה שמותם, טלה, שור, תאומים, סרטן, אריה, בתולה, מאזנים, עקרב, קשת, גדי, דלי ו-דגים.²⁸ ועל דרך כלל קראו לכל חלק וחלק מהם בשם מזל. וסדר המזלות²⁹ ההם הוא (ממזרח למערב) [ממערב למזרח]³⁰ כדרך תנועת מהלך השמש.

²¹ Jud. 5 ; 6.

²² Celestial parallels.

²³ The vernal equinox or the point γ .

²⁴ The autumnal equinox or the point Ω .

²⁵ The ecliptic or literally, the zodiac.

²⁶ The ecliptic, literally the line of occultation

²⁷ Celestial longitude.

²⁸ Aries (Ram) from 0° to 30°, Taurus (Bull) from 30° to 60°, Gemini (Twins) from 60° to 90°, Cancer (Crab) from 90° to 120°, Leo (Lion) from 120° to 150°, Virgo (Virgin) from 150° to 180°, Libra (Scales) from 180° to 210°, Scorpio (Scorpion) from 210° to 240°, Sagittarius (Archer) from 240° to 270°, Capricornus (Goat) from 270° to 300°, Aquarius (Waterman) from 300° to 330°, Pisces (Fishes) from 330° to 360°.

²⁹ The signs of the Zodiac.

עוד מצאו ברוב הזמן על ידי כלים הנאותים לכך שמרחק השמש בנטייתו מגלגל משהו היום הוא מרחק שווה אשר לא ישתנה בשום זמן. ועם היות ויש מרחק מיוחד לכל מעלה ומעלה ממעלות גלגל השמש בפחות ויותר, עם כל זה, מרחק המעלה עצמה הוא מרחק שווה בכל עת ובכל זמן. המשל בזה כאשר יהיה השמש בראש סרטן אזי הוא רחוק ממשוה היום כ"ג מעלות וחצי ולא ישתנה המרחק ההוא בכל זמן. ובעבור זה הסכימו לומר שגלגל המזלות וגלגל משהו היום נחתכים זה עם זה בשתי נקודות הפגיעה שמם ראש טלה וראש מאזנים, ושתי נקודות הפגיעה עומדות תמיד על מצב אחד ואינן זזות ממקומן ובלתי מתנועעות לגמרי.³¹ גם הששה המזלות מראש טלה עד סוף בתולה הם עומדים תמיד לפאת צפון ממשוה היום ונקראו המזלות הצפוניים וכן הששה המזלות האחרים,

מראש מאזנים עד סוף דגים הם עומדים תמיד לפאת דרום ממשוה היום ונקראו מזלות הדרומיים. ונקודת ראש טלה גם ראש מאזנים תמיד על קו משהו היום הוא תקום ולא תזוז משם והיא נקודת הפגיעה או נקודת השווה לפי שכל שאר הנקודות מגלגל המזלות נוטות ממשוה היום לצפון או לדרום עד שכל נקודה הנוטה ממשוה היום יותר מחברתה יש לה מרחק יותר עד ראש סרטן ושם תהיה הנטייה ממשוה היום בתכלית המרחק לצפון ומרחקו כ"ג מעלה וחצי. הנה בידך כי תכלית מרחק השמש ממשוה היום לצפון או לדרום הוא כ"ג מעלה וחצי. ולהיות שגלגל המזלות נוגע תמיד במקום אחד מגלגל משהו היום והוא בשתי נקודות הפגיעה. מבואר מזה שגלגל המזלות מתנועע ממזרח למערב בתנועה הכרחית ומקיף כל כדור הארץ בתנועתו ביום אחד עד שהמזלות צומחים ועולים זה אחר זה בפאת מזרח כפי סדר המזלות, רצוני לומר, בתחילה עולה טלה ואחר כך שור ואח"כ תאומים וכן כולם ושוקעים בסדר הזה. ובכל עת ובכל זמן יהיו ששה מזלות למעלה מן האופק וששה מזלות למטה מן האופק כאשר שוקע ראש טלה בערב אזי עולה ראש מאזנים במזרח שהוא מזל השביעי ממנו וכן כולם. וראוי שתדע כי במסיבתם ממזרח למערב יהיה לכל מזל ומזל ולכל נקודה מגלגל המזלות דרך ומסלול בפני עצמו כי ראש טלה וראש מאזנים מסבבים במסיבת משהו היום עצמו ומסיבת ראש שור וראש בתולה היא בפאת צפון ממשוה היום ומסיבת ראש עקרב וראש דגים היא בפאת דרום ממשוה היום וכן מסיבת כל מעלה ומעלה מגלגל המזלות משונה מחברתה עד שמסיבת ראש סרטן היא בתכלית המרחק ממשוה היום לצפון וכן מסיבת ראש גדי היא בתכלית המרחק לדרום ומסלול מהלך כל מזל ומזל ממזרח למערב נקרא מסיבה היומית. וממה שהתבאר תוכל לצייר כי ראש טלה וראש מאזנים עולים תמיד באמצע המזרח ושוקעים באמצע המערב ושאר המזלות נוטים בעלייתם או בשקיעתם לצפון או לדרום כי ראש סרטן שהוא בתכלית המרחק ממשוה היום לצפון עולה תמיד ברוח מזרחית צפונית ושוקע במערבית צפונית וראש גדי שהוא בתכלית המרחק ממשוה היום לדרום עולה ברוח מזרחית דרומית ושוקע במערבית דרומית. וכן שאר כל המזלות כפי נטייתם לצפון או לדרום, כך עולים ויורדים לצפון או לדרום ונוטים באמצע המזרח ומאמצע המערב. ובעבור שיש לכל גלגל שני קוטבים מבואר שיש גם לגלגל המזלות שני קוטבים ולהיות שגלגל המזלות מתנועע בתנועה הכרחית על ידי תנועת משהו היום יחויב מזה שגם קוטבי גלגל המזלות יתנועעו על ידי תנועה הכרחית ההיא ואינם שוקטים ונחים כקוטבי גלגל היום. ויתנועעו קוטבי גלגל המזלות סביב קוטבי גלגל היום (שהם קוטבי משהו היום או קוטבי העולם) במשך זמן כ"ד שעות, פעם עומדים למעלה מהם, פעם למטה מהם, פעם מימינם ופעם משמאלם. שאם קוטב המזלות הצפוני עומד למעלה מקוטב העולם הצפוני, אזי יהיה קוטב המזלות הדרומי למטה מקוטב העולם הדרומי וההפך בהפך. ואם יהיה קוטב המזלות הצפוני מימין מקוטב העולם הצפוני, אזי יהיה קוטב המזלות הדרומי משמאל מקוטב העולם הדרומי וההפך בהפך. ותמיד יתרחקו קוטבי המזלות מקוטבי העולם כשיעור מרחק הרחוק של גלגל המזלות ממשוה היום והוא כ"ג מעלה וחצי וגם הם עושים מסיבה יומית כמו שאר הנקודות של גלגל המזלות.

ת.

³⁰ The diurnal movement is from east to west, it is a retrograde movement or clockwise. The annual movement of the sun and the order of succession of the constellation is from west to east, it is in the direct direction or counterclockwise.

³¹ As long as we neglect the precession of the equinoxes.

ולהיות שגלגל השמש הוא תחת גלגל המזלות ושני הגלגלים האלה מתנועעים במסיבתם היומית ממזרח למערב, והשמש מתנועע בגלגלו בתנועתו העצמית ממערב למזרח, הפך תנועת המסיבה היומית, מבואר מזה שבהיות השמש בראש טלה, הוא מתנועע והולך ממערב למזרח. ואחרי שלושים יום בקירוב יהיה בראש מזל שור וכן הוא מתנועע והולך עד שיגיע לראש תאומים ובדרך זה הוא מתנועע בגלגלו עד שיבא אל מקומו הראשון ב-שס"ה יום בקירוב. והנה מכל זה תוכל להתבונן בנקל כי גם השמש במסיבתו היומית פעם תהיה מסיבתו כמסיבת המזלות הצפוניים, והוא בהיותו במזלות הצפוניים, ופעם תהיה מסיבתו כמסיבת המזלות הדרומיים, והוא בהיותו במזלות הדרומיים. ופעם הוא מיסב כמסיבת משה היום עצמו והוא בהיותו בשתי נקודות הפגיעה. ומזה תבין כי כל מה שדברנו מנטיית המזלות הוא הדין בעצמו בנטיית השמש ומסיבתו בלא שינוי, רצוני לומר שבהיותו בראש טלה אזי הוא עומד על משה היום עצמו בנקודות הפגיעה ואין לו נטייה ממנו ומשם והלאה נוטה לצפון ומתרחק ממנו בתנועתו עד שיגיע לראש סרטן ואז תהיה נטייתו ממנו בתכלית המרחק והוא כ"ג מעלה וחצי והוא הנקרא היפוך הקייצי,³² כי משם והלאה מתהפך בתנועתו ומתקרב והולך אל משה היום עד שיגיע לראש מאזנים. ואז הוא הוא עומד על משה היום עצמו בנקודת הפגיעה השנית ואין לו נטייה ממנו ומשם והלאה מתרחק ממנו לפאת דרום עד שיגיע לראש גדי ואז תהיה נטייתו ממנו בתכלית המרחק לצד דרום. והמרחק הזה הוא כ"ג מעלה וחצי והוא הנקרא היפוך החורפי³³ כי משם והלאה מתהפך בתנועתו להתקרב אל משה היום עד שעגיע אל המקום אשר היה שם בתחילה והוא ראש טלה.

ט.

כל המדינות השוכנות על קו השווה, רצוני לומר שהן מכוונות תחת קו משה היום והוא שעגולת משה היום עוברת על נוכח נקודות ראשי המדינות ההן וקוטבי העולם שוכבים על אופק המדינות ההן. הנה בכל המדינות ההן יהיו הימים והלילות שווים בכל ימות השנה, וכל זה הוא לפי שקשת המסיבה היומית שלהן אשר למעלה מן האופק הישר³⁴ הוא שווה עם הקשת אשר הוא למטה מן האופק, כי כמו שבאופק נוטה³⁵ (לצפון או לדרום ממשוה היום, שאין קשת מסיבתם הנראית והנסתרת שוות כאשר יהיה השמש במזלות הצפוניים או הדרומיים שאז הימים והלילות משתנים) יהיו הימים והלילות שווים כאשר יהיה השמש בשתי נקודות הפגיעה, שהן ראש טלה וראש מאזנים. לפי שאז תהיה קשת המסיבה היומית הנראית שווה עם קשת המסיבה הנסתרת תחת האופק. כך באופק ישר יהיו הימים והלילות שווים כאשר יהיה השמש בכל מזל מן המזלות. וסיבה הזו בעצמה אע"פ שהמזלות ההם נוטים מגלגל משה היום לצפון או לדרום וקשת מסיבתם הנראית היא פחותה מקשת מסיבת משה היום. וכל זה לפי שנקודת מסיבתם היומית אשר תעלה במזרח עם נקודת משה היום בשווה הן הנקודות בעצמן השוקעות בשווה ברגע אחד במערב. המשל (בצורה ב)³⁶ עגולת א, ב, ג, ד, הוא אופק משוכני קו השווה³⁷ וקו ב, ה, ו, ז, ח, ד, הוא גלגל משה היום ומתנועע מן ב אל ה ואל ו וכו'.³⁸ ונקודת ב הוא פאת מזרח ונקודת ד הוא פאת מערב. ונקודת א הוא קוטב הצפוני ונקודת ג הוא קוטב הדרומי וגלגל המזלות מתנועע בתנועתו

³² The estival inversion = the summer solstice.

³³ The winter inversion = the winter solstice.

³⁴ The right horizon. This expression characterizes the horizon of any region at the equator.

³⁵ The oblique horizon. This expression characterizes the horizon of any region with latitude different than zero and thus not belonging to the equator.

³⁶ It represents the celestial sphere of a point of the surface of the earth at the equator. The equator and the celestial parallels are perpendicular to the plane of the horizon. The axis of the world and its poles are in the plane of the horizon and the equator passes through the zenith and the Nadir. In the representation of the manuscript, the celestial sphere is seen from the zenith and projected on the horizon. The equator appears as a perpendicular to the axis North-South and the ecliptic as an oblique because it is assumed in this drawing that the vernal equinox coincides with the zenith and the autumnal equinox coincides with the nadir.

³⁷ The local horizon of this area of the equator.

³⁸ Clockwise as viewed from the north celestial pole.

ההכרחית עם תנועת משה היום כדרך שכל מסיבות היומיות מתנועעות. וכל הנקודות שבגלגל המזלות הן מקבילות נוכח נקודות משה היום עד שכל המסיבות היומיות הן שוות בעלייתן ובשקיעתן במדינות האלה, שהן תחת משה היום, רצוני לומר החלק מה שלמעלה מן האופק שלה עם מה שלמטה ממנה אע"פ שקשת מסיבתן פחותה מקשת מסיבת משה היום. ונדמה עוד אופקים אחרים לשוכני קו המשווה כגון אופק א,ה,ג או אופק א,ו,ג וכיוצא בהם, שהם אופקים מתחלפים לשוכני קו המשווה באורך המדינה ממערב למזרח עד שיתכן שאופק אחד מיושבי קו המשווה הוא אופן חצי היום למדינה אחרת משוכני קו המשווה.³⁹ וכן כל אופק ואופק משוכני קו המשווה הוא אופן חצי היום למדינה אחרת שהיו ברוחב המדינה חוץ ממשוה, לצפון או לדרום.⁴⁰ ונניח נקודת א,ה היא נקודת ארץ ישראל שהוא בצפון ממשוה היום, הנה עגולת א,ו,ג שהוא אופק לאחת מן המדינות משוכני קו המשווה היא עוברת על נקודת נוכח ראשי מדינת א,ה שהוא מדינת ארץ ישראל וא"כ הוא עגולת חצי היום למדינה ההיא. ואתה המעיין עמוד והתבונן בצורה הזאת ותבין ותשכיל כי בכל העגולים והקווים שבתוך העגולה המקפת הצורה הזאת ותדמה בהם בנפשך כאילו הם מתעגלים למעלה מן השטח ובעגולה המקפת את כל הצורה תהיה עגולה שיטתית כמו שהיא וכאשר תשים הדברים האלה על לבך אז תצליח ואז תשכיל.

י.

ואשר ראוי שתדעוהו הוא כי על ידי עגולי האופקים משוכני קו המשווה או על ידי אופני חצי היום משאר המדינות שהן חוץ מקו המשווה, בהם מודדים נטיית כל נקודה ונקודה הנוטה ממשוה היום לצפון או לדרום.⁴¹ המשל בצורה והיא צורה ב, שמזל סרטן רחוק ממשוה היום קשת בנ והוא נטיית הסרטן לצפון. ומזל תאומים נוטה לצפון קשת הס מעגולת א,ה,ג ומזל דלי נוטה לדרום קשת מט מעגולת ג,ט,א ומזל גדי נוטה לדרום קשת פד מעגולת א,ד,ג וכן כולם כמו שהם. ומבואר שכל שתי נקודות מגלגל המזלות שאחת בצפון ואחת בדרום שהן רחוקות מנקודות הפגיעה במרחק שוה, תהיה גם נטייתן שוה כמו ראש שור וראש בתולה וראש עקרב וראש דגים שהם שוים במרחקם מנקודת הפגיעה וכל מרחק מהם שלושים מעלה, הנה גם הם שוים בנטייתם ממשוה היום. וכן ראש תאומים וראש אריה וראש קשת וראש דלי שהם שוים במרחקם מנקודת הפגיעה וכל מרחק מהם הוא ששים מעלה לכן גם בנטייתם ממשוה היום הם שווים. וכן ראש סרטן וראש גדי מרחקם שוה מנקודת הפגיעה והוא מרחק תשעים מעלה, הנה גם נטייתם הוא שוה. אף ראש טלה וראש מאזנים אין להם נטייה לגמרי לפי שהם על נקודת הפגיעה עצמה.

יא.

כבר הסכימו בעלי תכונה להתחיל מניין מעלות גלגל המזלות מתחילת מזל טלה.⁴² גם מניין מעלות משה היום התחילו למנות מתחילת טלה כפי סדר המזלות כי אמרו שמתחילת טלה עד ראש שור שלושים מעלה ועד ראש

³⁹ All the circles passing through the North and South poles are declination circles perpendicular to the equator. The author means that each of these circles is parallel to the plane of the horizon of a specific point of the equator and also parallel to the meridian of another point of the equator. The last point has a longitude equal to the longitude of the first point plus 90°.

⁴⁰ Each declination circle is parallel to a geographical and a celestial meridian.

⁴¹ Today we abstain from referring always to the planes of the points of the equator and to the meridians of points not belonging to the equator when we consider the local declination on the celestial sphere. Rather the declination is measured on the declination circles.

⁴² The vernal equinox. They are counted counterclockwise.

תאומים ששים מעלה ועד ראש סרטן תשעים מעלה ועד ראש מאזנים ק"פ מעלה ועד ראש גדי ר"ע מעלה וכן הדין במניין מעלות משה היום.

יב (א).

ואם תרצה לידע נטיית כל נקודה ונקודה מגלגל המזלות הסתכל בצורה **ב** ותראה כי הקשת המגבלת מרחק הנטייה הוא קשת אופן מאופני חצי היום⁴³ העובר על הנקודה מגלגל המזלות (אשר אנו מבקשים מרחק נטייתה) וחותר את משה היום בדרך זוית נצבת. ומבואר שהזוית המוגבלת ממשוה היום ומגלגל המזלות לא ישתנה מרחקה בנטיית כל נקודה ונקודה מגלגל המזלות בין מעט בין הרבה כי תמיד תהיה נטייתה כ"ג מעלה וחצי (כמו מה שקימו וקבלו עליהם)⁴⁴ כל בעלי תכונה כי היקף כל גלגל וגלגל הוא ש"ס מעלה, בין שהוא גלגל גדול או קטן) וכל זה בעבור שהנטייה הגדולה גם היא כ"ג מעלה וחצי. וא"כ כל קשת הנטייה היא מנוגדת הזוית הנזכרת רצוני לומר שהזוית הנזכרת היא משותפת לכל הקשטות הנטיות. והנה במשולש **סהז** שהוא למשל ראש תאומים ונודע לנו כי הזוית **ה** היא זווית ניצבת וזוית **ז** היא כ"ג מעלה וחצי והנשטח **סז** ס' מעלה. והנה ע"י חשבון המשולשים נוכל לבא לידיעת קשת הנטייה שהיא קשת **הס**.⁴⁵

$$\log \sin 60^\circ = 9.9375306^{46}$$

$$\log \sin 23^\circ 30' = 9.6006997^{47}$$

$$19.5382303 = \log \sin 20^\circ 12'$$

וזאת היא הנטייה המבוקשת.

ואם נודעת לנו נטיית כל נקודה מראש טלה עד ראש סרטן, מבואר שידועה לנו נטיית כל שאר הנקודות מגלגל המזלות כי אחרי אשר ידענו נטיית ראש תאומים נדע נטיית ראש אריה לפי שנטייתם שוה וכן נטיית ראש קשת וראש דלי שוה וכן שאר כל נטיות המזלות שהם במרחק שוה מנקודת הפגיעה הם שוים בנטייתם.

י"ב (ב).

כל נקודה ונקודה ממשוה היום העולה בשוה עם נקודה מנקודות גלגל המזלות זהו מה שנקרא אצל חכמי תכונה מצעדי המזלות והוא קשת מאופן חצי היום⁴⁸ אשר תעבור על איזו נקודה מנקודות משה היום ותגיעה אל איזו נקודה מנקודות גלגל המזלות ואותו הקשת ממשוה היום נקרא קשת העלייה כי בה מודדים כמה מעלות העולות עמה מקשת גלגל המזלות. והנה מצעדי המזלות באופק ישר⁴⁹ שהוא אופק שוכני קו השוה (עיין בצורה שקדמה והיא בצורה **ב**) אם יעלה ראש שור (והוא נקודת **ע**) באופק הישר שהוא בעגולת **אעג**

⁴³ Circles of declination.

⁴⁴ Esth 9; 27.

⁴⁵ The exact formula is $\sin \delta = \sin \lambda * \sin \varepsilon$. If $\lambda = 60^\circ$ and $\varepsilon = 23^\circ 30'$ then $\delta = 20.2017^\circ = 20^\circ 12' 06''$

⁴⁶ Today $\log \sin 60^\circ = -0.06246937$. Hanover added 10 and got 9.9375306

⁴⁷ Today $\log \sin 23^\circ 30' = -0.39930032$. Hanover added 10 and got 9.6006997

⁴⁸ As already mentioned each circle of declination is parallel to the plane of the horizon of a point of the equator and to a meridian having a geographical longitude equal to the first point increased with 90° . It seems easier to call these circles of declination of the local celestial sphere without referring always to other regions of the earth.

⁴⁹ The circle of declination is the horizon of a point on the equator. The point of the ecliptic of longitude λ rises and sets at the horizon on any point of the equator together with the point on the equator of the corresponding right ascension α . Hence the name right ascension as the trajectories of the celestial bodies at the horizon of a point of the equator, are perpendicular to it.

והיא העגולה החותכת עגולת משה היום בנקודת ו, נאמר על ראש שור שעלה עמו קשת זו ממשוה היום. כן אם עולה תאומים והיא נקודת ס נאמר שעלה עמו קשת זה ממשוה היום והיינו מתחילת נקודה הפגיעה והיא נקודת ז עד נקודת ה שהיא נקודת החיתוך שהאופק ומשוה היום חותכים זה את זה. ומן הצורה הזאת תוכל לצייר כי הקשת מהגלגל המזלות אשר מנקודת הפגיעה עד ראש תאומים והיא נקודת ס, היא גדולה מן הקשת שהיא מנקודת הפגיעה עד נקודת ה ממשוה היום. ואולם קשת העלייה בראש סרטן היא שוה לקשת סג העולה עמה ממשוה היום כי כל קשת משתיהן היא תשעים מעלה. אבל מראש סרטן ואילך יהיה קשת עליית משה היום גדולה מקשת עליית גלגל המזלות. המשל בזה אם עולה ראש אריה תהיה קשת המזלות קשת זעסנס וקשת העלייה ממשוה היום היא קשת זוהבה והיא גדולה מקשת המזלות. וכן היא מוספת והולכת עד ראש = מאזנים ואז שתיהן שוות וכל קשת מהן ק"פ מעלה. מראש טלה ומראש מאזנים ואילך עד סוף דגים יהיה ערך הקשת זו לזו באורך ובקוצר כערך קוצר ואורך בקשתות מן טלה ועד מאזנים, רצוני לומר שמראש מאזנים עד ראש גדי תהיה קשת המזלות גדולה מקשת משה היום ובראש גדי עצמו שתיהן שוות ושיעור כל אחת מהן ר"ע מעלה, ומשם והלאה קשת משה היום מוספת והולכת על קשת גלגל המזלות. וכן הדין בקשת השקיעה ותבין ותדע כי כל מה שזכרנו ממצעדי המזלות הוא דרך כלל⁵⁰. אמנם בדרך הפרטי רצוני לומר מה שיעלה עם כל מעלה מגלגל המזלות הוא זה:⁵¹ מן חצי שור עד חצי אריה קשת משה היום היא גדולה יותר מקשת המזלות כי עם מעלה אחת מגלגל המזלות עולה יותר ממעלה במשוה היום. ומן חצי אריה עד חצי עקרב תהיה קשת המזלות גדולה יותר מקשת משה היום כי בעליית מעלה אחת מגלגל המזלות תהיה הקשת ממשוה היום העולה עמה פחות ממעלה. ומן חצי עקרב עד חצי דלי יהיה הדין כמו מן חצי שור עד חצי אריה ומן חצי דלי עד חצי שור יהיה הדין כמו מן חצי אריה עד חצי עקרב כי בארבע מקומות האלה תהיה עלייתן שוה וכן הדין בשקיעה. וכל זה באופק ישר שהוא אופק לשוכני קו השוה שקו חצי היום הוא אופק שלהם.⁵² אבל בשאר האופקים הנוטים מן הקו השוה יהיה בהם דרך אחר וכמו שיתבאר לפנינו. ולהגיע אל ידיעת עליית משה היום עם איזו נקודה שבגלגל המזלות הוא עולה, צריכין אנחנו לחשבון המשולשים והוא במשלנו זוית ניצבת שבו נודע הנטייה וזוית אחת ונרצה לדעת צלע הסמוכה אל הזוית הידועה כגון אם אנו מבקשים לדעת עליית המשוה באופק ישר בראש תאומים יהיה במשולש הסז בצורה ב, זוית ה ניצבת וזוית ז כ"ג מעלה וחצי והנשטח זס ס' מעלות ועפ"ז נוכל למצא צלע הז שהיא עליית המשוה עם ראש תאומים.⁵³

$$\log \tan 60^\circ = 10.2385606^{54}$$

⁵⁰ Thus from the formula $\tan \alpha = \tan \lambda * \cos \varepsilon$ or $\tan \alpha = 0.917 * \tan \lambda$ we deduce 1) that $\alpha = \lambda$ for $\lambda = 0, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ and 360° 2) in the first and third quadrant $\tan \lambda > \tan \alpha > 0$ and therefore $\lambda > \alpha$ and 3) in the second and the fourth quadrant $0 > \tan \alpha > \tan \lambda$ and therefore $\alpha > \lambda$.

⁵¹ Here Hanover wants to compare $\Delta \alpha$ and $\Delta \lambda$. By differentiation of the formula: $\tan \alpha = \tan \lambda * \cos \varepsilon$ we get for the first member $(1 + \tan^2 \alpha) d \alpha / d \lambda$ and for the second member $\cos \varepsilon * (1 + \tan^2 \lambda)$. Therefore $d \alpha / d \lambda = \cos \varepsilon * (1 + \tan^2 \lambda) / (1 + \tan^2 \alpha) = \cos \varepsilon * (1 + \tan^2 \lambda) / (1 + \tan^2 \lambda * \cos^2 \varepsilon)$. With $\varepsilon = 23^\circ 30'$ we can write $d \alpha / d \lambda = 0.917 (1 + \tan^2 \lambda) / (1 + 0.841 \tan^2 \lambda)$

If $\lambda = 45^\circ$ and $\varepsilon = 23^\circ 30'$ then $d \alpha / d \lambda = 0.996263 \sim 1$ thus from 45° until 135° and from 225° until 315° $d \alpha / d \lambda > 1$ and from 135° until 225° and from 315° until 45° $d \alpha / d \lambda < 1$. It should be noted that the limits are rounded off limits and not theoretical limits. From the former formula we deduce with more precision that $d \alpha / d \lambda = 1$ for $\lambda = 46^\circ 15', 133^\circ 45', 226^\circ 15'$ and $313^\circ 45'$. Between $313^\circ 45'$ and $46^\circ 15'$ and between $133^\circ 45'$ and $226^\circ 15'$ $d \alpha / d \lambda > 1$. Hanover wrote approximately $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$ and 315° .

⁵² See above. The formulation is unclear and imprecise. What should be noted and remembered is that in the local celestial sphere of a place with geographical coordinate θ, ϕ , the plane of the horizon is noted as the oblique horizon. The circle of declination passing through the points E and W, the middle of the eastern and western horizons is perpendicular to the meridian and is parallel to the horizon of the point on the equator having the same longitude θ and, therefore, also the same meridian. The plane of this circle of declination is called in ancient astronomy: right horizon. The point of the ecliptic with longitude λ and the point of the equator with corresponding right ascension α set and rise on the right horizon at the same moment at 6 p.m. true time and 6 a.m. true time. In modern astronomy we don't make this analogy but we know that the hour angle of the two half circles of declination of this plane is $+90^\circ = 6$ p.m. and -90° or 6 a.m.

⁵³ The formula is $\tan \alpha = \tan \lambda * \cos \varepsilon$. If $\lambda = 60^\circ$ and $\varepsilon = 23^\circ 30'$ then $\alpha = 57.8069^\circ = 57^\circ 48' 25''$.

⁵⁴ $\log \tan 60 = 0.2385606$. Hanover added 10.

$$\log \cos 23^\circ 30' = 9.9623978^{55}$$

$$20.2009584 = \log \tan 57^\circ 48'$$

וזאת היא עליית משוה היום העולה עם נקודת ראש תאומים באופק ישר. וממה שהראיתיך תוכל להגיע על עליית קשת משוה היום בכל נקודה ונקודה העולה עם נקודה מן הנקודות שבגלגל המזלות. ואם ידעתה באלה שוב לא יהיה נעלם ממנו עלייתה מ-צ' מעלה עד ק"פ אשר תעלה עם הנקודה מגלגל המזלות והוא שתקח מרחקה מנקודת הפגיעה הקרובה. המשל בזה אם תרצה לדעת עליית המשוה בראש אריה תיקח מרחקה מנקודת הפגיעה הקרובה. והוא ראש מאזנים והמרחק הוא ס' מעלה ותדע עליית משוה היום שהוא שוה לעלייתה עם ראש תאומים שהוא ס' מעלה מן ראש טלה, וכן תגרע אותה מן ק"פ מעלה והנשאר הוא עליית המשוה עם ראש אריה. וכן תוכל לעשות בכל נקודה שהוא מ-צ' עד ק"פ מעלות. ואם ידועה לך נטיית כל נקודה ונקודה עד ק"פ, בנקל תוכל למצא עליית המשוה עד ש"ס מעלות והא שתקח המרחק מראש מאזנים עד הנקודה שתתחיל לדעת נטייתה⁵⁶ ותחשב הנטייה ההיא כאילו תהיה מרחקה מראש טלה ויצא לך מבוקשך וככה תוכל לידע נטיית כל נקודת כל נקודה עד ש"ס מעלה.

י"ג.

כאשר תסתכל היטב בכדור המוגשם, עיניך תראינה ראייה מוחשת שכל האופקים הנוטים מקו השוה לצפון תסובב בהם משוה היום בעקום, לא ביושר, כאשר הוא באופקי קו השוה, לפי שמשוה היום נוטה מעל ראשי האופקים ההם כשיעור נטיית המדינות ההם מקו השוה. ומשוה היום מכריח הגלגל המזלות בתנועתו עד שכל נקודה מגלגל המזלות תסבב במסיבה היומית עגולה נכחית למשוה היום במרחק שוה מכל צד. ואותן המסיבות נחתכות באופקים שלהן על שני חלקים שונים, רצוני לומר, במזלות הצפוניים תהיה קשת המסיבה שהיא למעלה מן האופק גדולה מקשת המסיבה אשר היא תחת האופק. לכן כאשר יהיה השמש במזלות הצפוניים יהיה היום גדול מן הלילה וכל זה לפי שהשמש שממנו יתהוה היום הוא מסב למעלה מן האופק קשת יותר גדול ממה שהוא מסב למטה מן האופק. ובמזלות הדרומיים תהיה קשת המסיבה היומית שהיא למעלה פחות מן הקשת שהיא למטה מן האופק, לכן בהיות השמש במזלות ההם אז יהיה היום קצר מן הלילה. וכל שהאופק נוטה יותר לפאת צפון יהיה גם ההבדל שבין היום והלילה יותר גדול באורך ובקוצר עד שבאופק קוטב הצפוני שגלגל משוה היום הוא אופק שלו לפי שהקוטב הוא נוכח הראש להעומדים תחתיו ויהיה להם משך זמן חצי שנה כולו יום והוא בהיות השמש במזלות הצפוניים, לפי שאז נשאר השמש תמיד למעלה מן האופק אע"פ שמסיבת משוה היום מסבב מסיבתה ב-כ"ד שעות, מ"מ לא יתכן שירדו להם המזלות הצפוניים למטה מן האופק בשום זמן. גם לא יתכן שהמזלות הדרומיים יעלו למעלה מן האופק, לכן בהיות השמש במזלות הדרומיים והוא משך זמן חצי שנה יהיה כולו לילה (עיין לקמן בצורה ג). ואולם כאשר יהיה בראש טלה ובראש מאזנים אזי ישו הימים והלילות בכל המדינות אשר יהיו בהם יום ולילה בכל כ"ד שעות, שאז יסבב השמש במשוה היום עצמו וישוה הקשת אשר למעלה מן האופקים אל הקשת אשר למטה מן האופקים. ולזאת הסיבה נקרא הגלגל הזה משוה היום. וראוי שתדע כי כל מה שאמרנו באופקים הצפוניים יהיה בהפך באופקים הדרומיים כי יום האופקים הצפוניים הוא ליל האופקים הדרומיים.

י"ד.

⁵⁵ $\log \cos 23^\circ 30' = -0.0376022$. Hanover added 10. His logarithm had a precision of 7 decimals!

⁵⁶ The text is unclear: we were trying to find for the right ascension knowing the declination and now we want suddenly to know the declination.

ותבין ותשכיל כי עליית מעלות המזלות באופק נוטה (הנקרא בלשון ערבי מטאלע) בלתי שווה לעליית המעלות באופק ישר.⁵⁷ כי עליית קשת המזלות הצפוניים תמיד היא פחותה מעליית הקשת שבאופק ישר ועליית קשת המזלות הדרומיים באופק נוטה תמיד היא יתירה מעליית הקשת שבאופק ישר. ובקשת השקיעה (הנקרא בלשון ערבי מגראב אל ברוג) היה העניין בהפך, בין במזלות הצפוניים בין במזלות הדרומיים. המשל בצורה ד, קו ד, ה, ו, ג, הוא אופק המזרחי מהנוטה וקו א, מ, ה, ז, ב, הוא משהו היום, כ, הוא קוטב (הצפוני) [הדרומי] ל, הוא קוטב (הדרומי) [הצפוני] ועגולת ח, מ, ו, ט, הוא חצי גלגל המזלות ונקודת מ היא נקודת הפגיעה בראש טלה ונקודת ז היא נקודת העלייה והיא עלית ראש שור. תמשוך עגולה הדומה לאופק משהו היום עוברת על קוטבי העולם ועל נקודת העלייה, אזי תפגע העגולה ההיא במשהו היום בנקודת ו. והנה כפי מה שהתבאר לעיל סימן י"ב מבואר כי קשת מז היא קשת העלייה או מצעדי המזלות והוא מה שעולה עם ראש שור באופק ישר. וקשת מה הקשת העולה עם נקודת ו (שהוא ראש שור) באופק נוטה, והוא פחות מקשת מז. הנה מבואר לעיני הרוואה בראייה מוחשת כי קשת עלית מצעדי המזלות הצפוניים באופק נוטה היא פחותה מקשת עלייתם באופק ישר.⁵⁸ ובשקיעת המזלות הוא בהפך, רצוני לומר שקשת שקיעת המזלות הצפוניים באופק נוטה היא יתירה מקשת שקיעתם באופק ישר. המשל בצורה ה, קו ד, ה, ז, ג, הוא אופק המערבי הנוטה, קו א, ה, ו, מ, ב, הוא קו משהו היום, כ, הוא קוטב הצפוני, ל, הוא קוטב הדרומי, ועגולת ח, ז, מ, ט, היא עגולת חצי גלגל המזלות ונקודת מ היא נקודת פגיעתה במשהו היום והוא ראש טלה אשר הוא תחת האופק ונקודה ז היא שקיעת ראש שור. תמשוך עגולה הדומה לאופק משהו היום עוברת על קוטבי העולם ועל נקודת השקיעה. אזי תפגע העגולה ההיא במשהו היום בנקודת ו וא"כ קשת מו היא הקשת השוקעת באופק ישר עם ראש שור. וקשת מה הוא שיעור השוקע עם ראש שור באופק נוטה, היא יתירה מקשת מו בכדי קשת הו. מזאת הצורה תראה כי מעלות קשת השקיעה במזלות הצפוניים באופק נוטה הם ארוכי השקיעה לפי שקשת השקיעה בהם יתירה על קשת השקיעה שבאופק ישר, ואשר אמרנו שבמזלות (הצפוניים) [הדרומיים] יהיה הדבר בהיפך המשל בזה בצורה ו, קו ד, ז, ה, ג, הוא אופק המזרחי מהנוטה וקו א, מ, ו, ה, ב, הוא משהו היום ונקודת כ הוא קוטב הצפוני ונקודת ל הוא קוטב הדרומי ועגולת ח, ז, מ, ט, היא עגולת חצי גלגל המזלות ונקודת מ היא מקום פגיעת גלגל המזלות עם משהו היום והוא ראש מאזניים, נקודת ז היא עליית ראש מזל קשת. תמשוך עגולה הדומה לאופק משהו היום העוברת על קוטבי העולם ועל נקודת העלייה ותפגע במשהו היום בנקודת ו וא"כ קשת מו היא עולה עם ראש מזל קשת באופק ישר וקשת מה היא קשת המזלות העולה עם נקודת ראש מזל קשת באופק נוטה והיא יתירה מקשת מו בכדי קשת הו. מבואר מזה כי מצעדי המזלות הדרומיים באופק נוטה לצפון, הם יתירים מקשת עלייתם באופק ישר וההפך בשקיעת המזלות הדרומיים. המשל בצורה ז, קו ד, ז, ה, ג, הוא אופק המערבי מהנוטה וקו א, ו, ה, מ, ב, הוא קו משהו היום ונקודת כ הוא

⁵⁷ The right horizon represents the circle of declination passing through the point E, the middle of the east. This plane is perpendicular to the plane of the meridian of the place and it passes through the poles, it is thus the horizon of the place with the same terrestrial longitude located at the equator. Sunrise on this right horizon is thus at 6 a.m. true time and sunset is at 6 p.m. true time. Today we understand that simply on the ground that the hour angle of the sun passing through this circle of declination is $+90^\circ$ or -90° .

⁵⁸ Thus the sun coincides with the point י, it has the longitude $\lambda = 30^\circ$. The arc מז = $27^\circ 54'$ of the equator is the right ascension of the arc מו of the ecliptic while the arc מה = $\alpha - \Delta = 27^\circ 54' - 7^\circ 18' = 20^\circ 36'$ of the equator rises together with מו. When ז rises at the horizon at 6 a.m. ה rises 29m 13 s earlier at 5h 30m 47s a.m. All these figures correspond to Jerusalem $\phi = 32^\circ$.

⁵⁹ Thus the sun coincides with the point ז; it has the longitude $\lambda = 30^\circ$. The arc מז = $27^\circ 54'$ of the equator is the right ascension of the arc מז of the ecliptic while the arc מה = $\alpha + \Delta = 27^\circ 54' + 7^\circ 18' = 35^\circ 12'$ of the equator sets together with מז. When י sets at the horizon at 6 p.m. ה sets 29m 13 s later at 6h 29m 13s p.m. All these figures correspond to Jerusalem $\phi = 32^\circ$.

⁶⁰ Thus the sun coincides with the point ז, it has the longitude $\lambda = 240^\circ$. The arc מז = $57^\circ 48'$ of the equator + 180° is the right ascension of the arc $180^\circ + ז$ of the ecliptic while the arc מה = $\alpha - \Delta = 57^\circ 48' - (-13^\circ 18') = 71^\circ 06'$ of the equator rises together with מז. When י rises at the horizon it is 6 a.m. ה rises 53m 10 s later at 6h 53m 10s a.m. All these figures correspond to Jerusalem $\phi = 32^\circ$.

⁶¹ Thus the sun coincides with the point ז, it has the longitude $\lambda = 240^\circ$. The arc מז = $57^\circ 48'$ of the equator + 180° is the right ascension of the arc $180^\circ + ז$ of the ecliptic while the arc מה = $\alpha - \Delta = 57^\circ 48' - 13^\circ 18' = 44^\circ 30'$ of the equator rises together with מז. When י sets at the horizon at 6 p.m. ה sets 53m 10 s earlier at 5h 06m 50s p.m. All these figures correspond to Jerusalem $\phi = 32^\circ$.

קוטב הצפוני ל הוא קוטב הדרומי ועגולת כ,ז,מ,ט הוא חצי גלגל המזלות ונקודת מ הוא מקום פגיעת גלגל המזלות במשווה והוא ראש מאזנים ונקודת ז היא שקיעת ראש מזל קשת והעגולה הדומה לאופן משווה היום העוברת על קוטבי העולם ועל נקודת השקיעה תפגע במשווה היום בנקודת ו, א"כ קשת מו היא קשת השקיעה באופק ישר עם ראש מזל קשת ושיעור קשת מה שוקע עם ראש מזל קשת באופק נוטה והוא פחות מקשת מו בכדי שיעור קשת הו. התבאר מזה שקשת השקיעה ממזלות הדרומיים באופק נוטה היא פתוחה מקשת השקיעה באופק ישר. והנה בידך הבדל העלייה והשקיעה שבין אופק ישר לאופק נוטה והבדל הזה משתנה בפחות ויתר כפי שינוי האופקים הנוטים.

וכאשר תרצה לעמוד על הבדל עליית המשווה ועליית הנקודה אשר בגלגל המזלות תצטרך לחשבון המשולשים⁶² והוא בצורה ז, המשולש מהז שבו ידוע צלע מזו שהיא במשלנו ששים מעלות וזוית המז היא הנטייה הגדולה כ"ג מעלות וחצי וזוית (מהז) (והז) הוא תשלום רוחב המדינה עד צ' מעלות ויהיה במשלנו נ"ח מעלות באופק ירושלים שהיא ל"ח] ב מעלות ונרצה לדעת הבדל עליית קשת הו, וכבר בארנו שקשת מו הוא עליית המשווה עם נקודת ז באופק הישר ויהיה במשל הזה נ"ז מעלות מ"ח חלקים וכערך נוגע זוית תשלום רוחב המדינה אל נוגע הנטייה הגדולה כך ערך [בקע] העלייה הישרה אל בקע הבדל העלייה.⁶³

$$\log \operatorname{tg} 23^{\circ} 30' = 9.6383019$$

$$\log \sin 57^{\circ} 48' = 10.2008431^{64}$$

$$19.8391450$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{tang} 58 - 10.2042108$$

$$9.6349342 = \log \sin 25^{\circ} 34'$$

וזאת היא קשת הו הבדל עליית המשווה מנקודת ראש תאומים.⁶⁵

⁶² If we consider one of these figures, for example figure ה at sunset. We have a spherical triangle with the side on the ecliptic λ , the side on the equator $\alpha + \Delta$ and the side on the horizon w . The angle opposite to w is ε , the angle opposite to λ is $90^\circ - \varphi$ and the angle מזג between the ecliptic and the horizon is I , so the angle מהז is $180^\circ - I$. In the rectangular triangle w , δ and Δ : $\sin w = \sin \delta / \cos \varphi$, hence $\cos \text{Az} = -\sin \delta / \cos \varphi$ giving the azimuth of the points of sunset and sunrise. For the northern constellations $\delta > 0$ and w is oriented to the north and Az is $> 90^\circ$, hence the sign $-$.

In the great triangle λ , $\alpha + \Delta$ and w : the formula $\cos B = -\cos A * \cos C + \sin A * \sin C * \cos b$ gives $\cos (180 - I) = -\cos \varepsilon * \sin \varphi + \sin \varepsilon * \cos \varphi * \cos (\alpha + \Delta)$. Introducing the sidereal time $T_s = \alpha + \Delta + 90^\circ$ we get $\cos I = \cos \varepsilon * \sin \varphi - \sin \varepsilon * \cos \varphi * \sin T_s$.

In the great triangle λ , $\alpha + \Delta$ and w : the formula $\cotang c * \sin a = \cos a * \cos B + \sin B * \cotang C$ gives $\cotang \lambda * \sin (\alpha + \Delta) = \cos (\alpha + \Delta) * \cos \varepsilon + \sin \varepsilon * \cotang (90^\circ - \varphi)$. Introducing $T_s = \alpha + \Delta + 90^\circ$, in order to start measurements from the local meridian instead of from the horizon, we get $\operatorname{tang} \lambda = -\cos T_s / (\sin \varepsilon * \operatorname{tang} \varphi + \cos \varepsilon * \sin T_s)$ giving the longitude of the two points of intersection of the ecliptic and the horizon.

⁶³ The formula is: $\operatorname{tang} (90^\circ - \varphi) / \operatorname{tang} \varepsilon = \sin \alpha / \sin \Delta$ hence: $\sin \Delta = \sin \alpha * \operatorname{tang} \varepsilon * \operatorname{tang} \varphi$. This formula is correct at sunrise and sunset, both for the northern and southern constellations. Indeed in the spherical rectangular triangle מזו the angle מ is $23^\circ 30'$ and the sides of the right angle are $\text{מו} = \alpha$ and $\text{ו} = \delta$.

Therefore $\sin \alpha = \operatorname{tang} \delta / \operatorname{tang} \varepsilon$. In the spherical rectangular triangle the angle is $90^\circ - \varphi$ and the sides of the right angle are Δ and δ , therefore $\sin \Delta = \operatorname{tang} \delta / \operatorname{tang} (90^\circ - \varphi)$. Combining the two relations we get: $\sin \Delta = \operatorname{tang} \varphi * \operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} \varphi * \operatorname{tang} \varepsilon * \sin \alpha$, equivalent to the above relation. The application of the relation to the present case of $\lambda = 60^\circ$ gives $\Delta = 13.2929^\circ = 13^\circ 17' 34''$. The difference of sunsets is thus $13^\circ 17'$ or 53m 10s. The origin of the error in the the manuscript is that instead of $\log \sin \alpha$ Hanover wrote the value of the $\log \operatorname{tang} \alpha$.

Indeed $\log \sin 57.8069^\circ = 9.9275024$, while $\log \operatorname{tang} 57.8069^\circ = 10.2009591$. It is thus a careless mistake.

⁶⁴ As mentioned in the precedent note, Hanover gave here $\log \operatorname{tang} 57^\circ 48'$.

⁶⁵ Thus the difference between sunrise on the right horizon at 6 a.m. and between sunrise at the oblique horizon. It is striking that Hanover did not realize his error as $\Delta = 25^\circ 43'$ corresponds to 1h 42m 52s while in Israel the maximum value of Δ is 15.77° corresponding to 63 minutes.

וכערך עליית אופק נוטה לאופק ישר כך ערך שקיעת אופק נוטה לאופק ישר רק שבמזלות הצפוניים תהיה העלייה העקומה פחותה מהעלייה הישרה לכן אחר שיצא מערכך הבדל העלייה תגרוהו מן העלייה הישרה⁶⁶ והנשאר בידך הוא העלייה העקומה וההפך בשקיעה לפי שהשקיעה באופק נוטה היא יתירה על השקיעה הישרה, לכן תחבר ההבדל שיצא לך מערכך אל השקיעה הישרה והיוצא היא השקיעה העקומה ובמזלות הדרומיים יהיה הדבר בהפך כי אם תחבר הבדל העלייה תהיה בידך העלייה העקומה ואם תחסר הבדל השקיעה תהיה בידך השקיעה העקומה. ולפי שערך החשבון אחד הוא בעלייה ובשקיעה מבואר שגם הבדל אחד להם בפחות ויותר.

ואחרי אשר הונח בידך הבדל עליית כל נקודה עד תשעים מעלות כאשר הורינו שוב בנקל תוכל לדעת הבדל העלייה והשקיעה בכל ש"ס מעלה לפי מה שהארנו למעלה בסימן י"ב סדר נטיית המזלות מן המשוה בעלייתם ובשקיעתם.

וכן קשת המשוה העולה או השוקע עם קשת מגלגל המזלות שהיא פעם פחות ממנה ופעם היא יתר ממנה יהיה בהן השינוי בפחות ויתר כפי השינוי באופקים הנוטים. המשל באופק הנוטה כ"ד מעלה יהיה יתרון קשת משוה היום מקשת המזלות העולה עמו מן חצי תאומים עד חצי גדי ומן חצי גדי עד חצי תאומים⁶⁷ תהיה קשת המזלות יתירה מקשת משוה היום העולה עמו ובשקיעה יהיה הדבר בהפך רצוני לומר מחצי קשת עד חצי סרטן תהיה קשת המשוה יתר על קשת המזלות ומן חצי סרטן עד חצי קשת תהיה קשת המזלות יתר על קשת המשוה. לכן המזלות שמם מן חצי תאומים עד חצי גדי נקראו אצל בעלי תכונה ארוכי עלייה וקצרי שקיעה ומן חצי גדי עד חצי תאומים נקראו קצרי עלייה וארוכי שקיעה כי מאריכותם גם קצרותם הכל ישוער כפי קשת משוה היום המתנועע בשו"ט⁶⁸ מעלה בכל שעה. לכן מודדים ומונין בו השעות.

וההבדל הזה משתנה בפחות או ויתר כפי שינוי האופקים עד כי ברוחב ששים מעלה יהיה מראש סרטן עד ראש גדי או מראש גדי עד ראש סרטן אלה הקיצים וכל מה שאמרנו הוא באופקים הנוטים לצפון. אולם באופקים הנוטים לדרום יהיה הסדר בהם [להפך] ואנו אין לנו צורך בהם כפי הנידון שלפנינו.

ט"ו.

כבר התבאר שמשוה היום מקיף כל כדור הארץ בתנועתו היומית ממזרח למערב במשך זמן כ"ד שעות שוות ואיך שהימים והלילות שווים תמיד באופקי קו השוה. גם התבאר שהבדל העלייה שבאופקים הנוטים מקו השוה הוא כפי מה שיקדים השמש או כפי מה שיתאחר לעלות באופק נוטה בערך קשת אופק הישר.⁶⁸ ואם בעל נפש אתה,⁶⁹ תבין ותשכיל מוצא הדבר, כמה מעלות אשר יקדים או יתאחר השמש לעלות באופק נוטה מבאופק הישר. שוב לא יפלא ממך הבדל העלייה בדקדוק גמור בעתו ובזמנו עד רגע אחד והוא שתחשוב כל ט"ו מעלה ממשוה היום לשעה ומה שהוא פחות מ-ט"ו מעלות לחלקי שעה. ותדע כמה שעות או חלקים השמש מקדים או מתאחר לעלות או לשקוע באופק נוטה יתר על זמן שש שעות שהוא שיעור חצי יום אמיתי והוא הנקרא שינוי היום והלילה. והנני צריך להרחיב לך המאמר קצת בענין זה להכניח הדבר על בוריו במשלים ודמיונות לפי

⁶⁶ In modern astronomy this calculation is much easier. The hour angle of sunrise or sunset is given by $\cos H = -\tan \phi * \tan \delta$. The set lag is the difference between the time of sunset and 6 p.m. (hour angle of 90°); it is thus

$H - 90^\circ$. Now $\sin (H - 90^\circ) = -\sin (90^\circ - H) = -\cos H = \tan \phi * \tan \delta$.

If ϕ and δ have the same sign Δ is positif and $H > 90^\circ$; if ϕ and δ have the opposite sign Δ is negative and $H < 90^\circ$. Furthermore the matala or the arc of the equator rising together with the sun is $\alpha - \Delta$ and the maghrab or the arc of the equator setting together with the sun is $\alpha + \Delta$. This allows understanding easily the rules explained at length by the author. The meaning is very simple: in the northern hemisphere days are longer in spring and summer and nights are longer in autumn and winter. In the southern hemisphere it is the contrary. The task is thus the comparison in the morning of $\alpha - \Delta$ with α according to the sign of Δ and in the evening it is the comparison of $\alpha + \Delta$ with α according to the sign of Δ .

⁶⁷ I did not understand why he considered these limits.

⁶⁸ Thus calculating whether sunrise is before 6 a.m. or after 6 a.m.

⁶⁹ Prov 23 ; 2.

שדבר זה יסוד גדול ועמוד חזק אשר כל בית התכונה נשען עליו. והוא עיקר גדול בזאת ההלכה ורוב מפרשי הרמב"ם ז"ל היו נבוכים בעיקר זה ולא הכירו בו לכן לא עמדו על תכונתו.

י"ן.

הנה כאשר חקרו חכמי התכונה במהלך השמש בגלגלו, מצאו שיש הבדל במהלכו בכל יום ויום כי יש יום שיהיה בו מהלך השמש נ"ט חלקים ו-ח' שניות ממעלה אחד ויש יום שמהלכו רק נ"ט חלקים ויש יום שמהלכו יותר מששים חלקים שהם מעלה אחת. על כן גזרו אומר כי השינוי הזה אשר במהלך השמש אינו בערך אל עצמו רק הוא בערך גלגל המזלות שהארץ מוצקו. אבל מהלך השמש בגלגלו הוא מהלך שוה בכל ימות השנה ואין בו לא קלות ולא כבדות והכל הוא לפי מרכזו היוצא ממוצק הארץ שהוא מרכז גלגל המזלות, כי מרכז גלגל השמש היוצא ממוצק הארץ מתנועע סביב מוצק הארץ ממערב למזרח⁷⁰ בתנועה כבדות⁷¹ והשמש עצמו גם הוא מתנועע בגלגלו ממערב למזרח⁷² בכדי נ"ט חלקים ו-ח' שניות. והוא מהלך שוה בכל יום, ובעבור שמרכז גלגל השמש יוצא ממוצק הארץ לכן פעם יתרחק השמש מן הארץ ואז יהיה מהלכו בכבדות בערך אלינו ופעם יתקרב אל הארץ ואז יהיה מהלכו במהירות בערך אלינו. המשל בצורה ח, נקודת א היא מרכז הארץ והעגולה הקטנה **בג(ז)** היא מסבת מרכז גלגל השמש המתנועע ממערב למזרח סביב מרכז הארץ. וחצי קוטרו והוא קו **אב** הוא שיעור⁷³ 3/11 3465 חלקים מדויקים כי מתנועת מרכז גלגל השמש נרשם העיגול הקטן הזה סביב מרכז הארץ. המשל בצורה שקדמה, נקודה ב הוא מרכז גלגל השמש שהוא גלגל **ו,כ,ט,כ,ד,ל,מ** וקו **בו** או **בד** הוא חצי קוטרו שהוא 100000 חלקים שמהם קו **אב** 3/11 3465 חלקים. ובגלגל הזה מתנועע השמש ממערב למזרח מהלך שוה בכל יום בכדי נ"ט חלקים ח' שניות בקירוב ולמעלה מן הגלגל הזה הוא גלגל המזלות **זס** שמרכזו הוא נקודת **א** והוא מרכז הארץ. וגלגל השמש אינו נוטה משטח גלגלה אבל הוא מכוון תחתיו בשוה ובו אנו מקישים מקום השמש או שאר הכוכבים מכוכבי לכת. המשל בזה כאשר הלך השמש בגלגלו שלוששים מעלות, נאמר שהשמש בראש שור והנה מהלך השמש בגלגלו בבחינת מרכזו זהו הנקרא אצל בעלי תכונה מהלך אמצע השמש ומהלך השמש בבחינת מרכז גלגל המזלות בערך אלינו זהו הנקרא מהלך השמש האמיתי. ולעולם יהיה הבדל בין מקום אמצע השמש ובין מקום השמש האמיתי חוץ מבשתי נקודות והן נקודת **ו** ונקודת **ד** בצורה שלפנינו והוא בהיות השמש בתכלית מרחקו מן הארץ ובתכלית התקרבו אל הארץ שאז לא יהיה שינוי לגמרי בין מקום האמצעי ובין מקום האמיתי לפי שהקו היוצא ממרכז גלגל השמש ועובר על מרכז השמש עצמו הוא מגיע אל גלגל המזלות בנקודה ההיא עצמה אשר יגיע שם הקו היוצא ממרכז גלגל המזלות ועובר על מרכז השמש כי שני הקווים האלה נופלים זה על זה, והם קו **בוז** וקו **אבוז**, כי שניהם מגיעים אל הנקודה הרחוקה מן הארץ בתכלית ומקום ההוא נקרא גובה רום⁷⁴ וכן קו **אגדה** וקו **באגדה** שניהם נופלים זה על זה ומגיעים אל הנקודה שבמרחק הקרוב אל הארץ והוא נקרא שפל רום.⁷⁵ ואולם כאשר יהיה השמש בשאר מקומות שבגלגלו תמיד יהיה שינוי בין מקום אמצע השמש ובין מקום השמש האמיתי הפחות ויתר. המשל כאשר יהיה השמש בנקודת **ח** בגלגלו. הנה הקו היוצא ממרכז גלגל השמש ועובר על מרכז השמש הוא מגיע אל גלגל המזלות בנקודת **ע** והוא קו **בח** שהוא מקום אמצע השמש והקו

⁷⁰ Counterclockwise. It is the movement of the apogee and the line of the apsides.

⁷¹ This is the movement of the apogee which corresponded for the ancients to the precession of the equinoxes. Maimonides in HKH 12:2 estimated this movement to 1° in 70 years approximately and al-Battani noted 1° in 66 years. When Maimonides noted 0.15°/day he followed al-Battani because $3600 / 0.15 = 24000 \text{ days} = 65.71 * 365.25$.

⁷² Counterclockwise = direct direction = positive trigonometric direction.

⁷³ Al-Battani considered an excentricity of 0.0347; Hanover, probably following contemporary data, adopted thus 0.0346527.

⁷⁴ Apogee

⁷⁵ Perigee.

היוצא ממרכז גלגל המזלות ועובר על מרכז השמש מגיע במקום אחר מגלגל המזלות והוא קו **אחס** ותהיה נקודת **ס** מקום השמש האמיתי וקשת **סע** הוא קשת השינוי⁷⁶ שבין מקום האמצעי והאמיתי. ולפי שמהלך השמש הוא ממערב למזרח כסדר המזלות יהיה מקום השמש האמיתי פחות ממקום השמש האמצעי, רצוני לומר שהלך השמש במהלכו האמיתי פחות ממה שהלך במהלכו האמצעי ביום. הנה קשת השינוי הזה נקרא מנת השינוי והשינוי הזה הולך וגדל עד נקודת **ט** שאז יהיה השינוי שבין מקום האמצעי והאמיתי בתחילת גודלו כאשר יהיה השמש בנקודה ההיא. והשינוי הוא קשת **סע** ומשם והלאה השינוי פוחת והולך עד נקודת **ד**, כי כאשר יהיה השמש בנקודת **ד** אז לא יהיה שינוי בין מקום האמצעי והאמיתי כי הקו היוצא ממרכז גלגל השמש שהוא קו **באגדה** והקו היוצא ממרכז גלגל המזלות שהוא קו **אגדה** שניהם נופלים זה על זה ומגיעים אל מקום אחד בגלגל המזלות. ומשם והלאה רצוני לומר אחרי ק"פ מעלות מגובה הרום יתחילו הקוים להשתנות בדרך אחר, והוא שאז יהיה מהלך השמש האמיתי יתר על מהלך השמש האמצעי. המשל כאשר יהיה השמש בנקודת **ל** אזי יהיה מקומו האמיתי בנקודת **ס** ומקומו האמצעי יהיה בנקודת **ע**. הנה בזה הדרך יהיה מקומו האמיתי יתר על מקומו האמצעי שהרי קשת **העס** היא יתירה על קשת **הע** בכדי קשת **עס** והשינוי הזה גם הוא מוסיף והולך עד שיגיע השמש בנקודת **מ** ואז יהיה בתכלית גודלו. ומשם והלאה פוחת והולך עד שובו אל מקומו הראשון בנקודת **ו** שהוא מקום גובה הרום שאז אין בינו שינוי לגמרי ומשם והלאה חוזר הדין אל סדר הראשון כמו שהתבאר לך. ומן הצורה הזאת התבאר לך שבהיות השמש בגובה הרום שהוא המרחק הרחוק ממוצק הארץ והוא בצורה שלפנינו בנקודת **ו** וכן בהיותו בשפל רום שהוא המרחק הקרוב אל הארץ והוא בצורה שלפנינו נקודת **ד**, אזי לא יהיה שום שינוי לגמרי בין מקום אמצע השמש מן מקום השמש האמיתי. והמרחק הממוצע הוא כאשר יהיה השמש צ"ב מעלות מן הגובה הרום, והיינו כאשר יהיה השמש בנקודת **ט** או בנקודת **מ**. ואז יהיה הקשת השינוי בתחילת גדלו והוא קרוב לשתי מעלות. ולהיות כי מנת השינוי⁷⁷ שבין מקום האמצעי והאמיתי הוא כאשר יתנועע השמש מגובה הרום אל שפל הרום וכן כאשר יתנועע השמש משפל הרום אל גובה הרום יהיה מנת השינוי כשיעור מנת השינוי שבין גובה הרום לשפל הרום. לכן מתחילין לחשוב חשבון מספר מעלות השמש ממקום גובה הרום ואז נוכל לעמוד על קשת השינוי שבין האמצעי והאמיתי לדעת כמה הוא כפי מרחק מגובה הרום. ונאמר שביום אחד התרחק השמש מגובה הרום נ"ט חלקים ו-ח' שניות, ובעשרה ימים התרחק ט' מעלות נ"א חלקים וכו' עד ש"ס מעלות, ר"ל עד שובו אל מקום גובה הראשונה. וזה המרחק ר"ל מרחק השמש מן הגובה הרום, נקרא בפי הרמב"ם ז"ל מסלול השמש ושיעור הקשת בשינוי שבין מקום האמצעי והאמיתי זהו מה שקרא הרמב"ם ז"ל מנת המסלול.⁷⁸ ולפי שגובה הרום בזמנים האלה כבר נעתק עד ח' מעלות ממזל סרטן שהם צ"ח מעלות מראש טלה⁷⁹ לכן כאשר נרצה לדעת מקום השמש בגלגלו לכן גורעים צ"ח מעלות ממהלך השמש והנשאר הוא מסלול השמש. וכל זה כדי להתחיל החשבון מגובה הרום עד אשר נוכל לעמוד על שיעור מנת המסלול. ואחר שגרענו המנה ההיא מאמצע השמש או הוספנו המנה עד אמצע השמש, אזי נחזיר עליו המספר אשר גרענו בתחילה והוא מספר המרחק שבין ראש טלה וגובה הרום. ומה שיצא הוא מקום שמש האמיתי מראש טלה. ולפי שהתבאר שמנקודת גובה הרום עד שפל הרום תהיה מנת המסלול שוה למנת המסלול שבין שפל רום לגובה רום ואין ביניהם הבדל אלא שמנקודת גובה רום עד שפל רום יהיה מקום אמצע השמש יתר על מקום השמש האמיתי ומנקודת שפל רום עד גובה הרום יהיה מקום אמצע השמש פחות ממקום השמש האמיתי. ומבואר שמנקודת גובה הרום עד שפל רום הוא ק"פ מעלות כשיעור שפל רום עד גובה הרום. וכן לכל מגמתינו למצא מקום השמש האמיתי, לכן ראוי שנגרע מנת המסלול מאמצע השמש עד ק"פ מעלות לפי שאמצע בשמש הוא יתר על האמיתי ונוסיף מנת המסלול מ-ק"פ מעלות עד ש"ס מעלות לפי [שבמקום] ההוא יהיה אמצע השמש פחות מן האמיתי, המשל השמש יהיה בנקודת **מ** והוא ראש טלה ומקום הגובה בנקודת **ו** והוא ח' מעלות ממזל סרטן או צ"ח מעלות מראש מזל טלה. והנה אחרי רמ"ד יום כבר התנועע השמש מנקודת **מ** אל **ח**, ט עד נקודת **כ** והן ר"מ מעלות כ"ט חלקים נ"ב שניות והגובה התנועע בזמן ההוא ל"ו שניים, ויהיה מרחק הגובה מראש טלה צ"ח מעלה ל"ו שניים, תגרע מהלך הגובה

⁷⁶ The variation or correction is in ancient French; the *equation*: the equation of the center.

⁷⁷ Apparently Hanover uses מנת השינוי with the same meaning as קשת השינוי: the equation of the center or the quota of the anomaly.

⁷⁸ The quota of the anomaly; it has the same meaning as the equation of the center. It is the difference between the mean sun and the apparent or true sun.

⁷⁹ The vernal point γ .

ממהלך אמצע השמש, נשאר קמ"ב מעלות כ"ט חלקים ט"ז שניים שהוא קשת וט"כ והוא מסלול השמש, תוציע מנת המסלול והוא מעלה אחת י"ח⁸⁰ חלקים. ולפי שהמסלול הוא פחות מ-ק"פ מעלה והוא המקום שהשמש מתנועע בין גובה רומו ושפל רומו לכן תגרע מנת המסלול מאמצע השמש, נשאר רל"ט מעלות י"א חלקים (י"ב) [נ"ב] שניים והוא מקום השמש האמיתי והוא כ"ט מעלות י"א חלקים נ"ב שניים במזל עקרב. וע"פ חשבון המשולשים יוכל למצא מנת המסלול לכל מעלה ומעלה מהמסלול. המשל שלפנינו, משולש **אבה**, הנה זווית **אבה** הוא שארית ל-ק"פ מעלה מהמסלול וקו [בח] הוא חצי קוטר גלגל בשמש בכדי 100000 חלקים וקו **בא** הוא מרחק מרכז השמש ממוצק הארץ בכדי 3/11 3465 חלקים ואלה הם נודעים לנו ועל פיו נוכל להגיע לידיעת זווית **אהב** והיא מנת המסלול המבוקשת. וסדר החשבון⁸¹ הוא תחבר שתי הצלעות ותחסר שתי הצלעות ותעריך כך, כערך החיבור אל החיסור כך ערך נוגע חצי שארית הזווית שהוא חצי המסלול⁸² אל נוגע הבדל שתי הזוויות⁸³ הנשארות. ולזווית הגדולה תחבר שארית להבדל ולזווית הקטנה תחסר תחסר ההבדל מן חצי שארית ובמשלנו זה יהיה המסלול ק"ל מעלות וא"כ חצי שארית הוא כ"ה מעלות.⁸⁴

N 96534 8 / 11 log : 5.7250462

Tang 25° log : 9.6686725

15.3937187

D 103465 3 11 log – 5.7551573

9.6385614 = 23° 31'

וזהו [חצי] הבדל שתי הזוויות ותחסרהו מן הזווית המבוקשת, זווית **אהב**, נשאר מעלה אחת כ"ט חלקים והוא מנת המסלול.⁸⁵ וכל צורות האלה הן צורות דמיונות לקרב הדבר אל החוש והשכל כדי להשקיט הדמיון האנושי ולהפיק רצון המעיין.

⁸⁰ According to the tables of Luhot ha-Ibbur and Tekhunat ha-Shamayim, it must be 15'.

⁸¹ In $\triangle$ אבה in the triangle אבה the side a= **בה** is 100000, the side b= **אב** is 3465 3/11 and the angle אבה is $180^\circ - \text{anomaly}$ or $180^\circ - \alpha$. The quota of the anomaly is the angle **סחא** or **בהא**. If we denote **אה** = c we can write $c \sin \beta = b \sin \alpha$ and $c \cos \beta = a + b \cos \alpha$.

Hence $\tan \beta = e_0 \sin \alpha / (1 + e_0 \cos \alpha)$. With $L_0 = l_0 - \beta$. If $\alpha = 130^\circ$ we find $\beta = 1.55521 = 1^\circ 33'$.

However this formula is not logarithmic and therefore the classical method of the resolution of a triangle when we know two sides and the angle between them is the use of the formula of the tangents.

$(a - b) / (a + b) = [\tan (A - B) / 2] / [\tan (A + B) / 2]$. Thus in our triangle $(100000 - 3465.27) / (100000 + 3465.27) = [\tan (\alpha - 2\beta) / 2] / [\tan \alpha / 2] = 0.933016$.

If $\alpha = 130^\circ$ we find $\beta = 1.55521$ or $1^\circ 33'$. If $\alpha = 50^\circ$ we find $\beta = 1^\circ 29'$.

⁸² $(A + B) / 2 = \alpha / 2$, the half of the anomaly.

⁸³ $(A - B) / 2 = (\alpha - 2\beta) / 2$

⁸⁴ The anomaly seems to be 130° , the complement 50° and its half 25° . However the result of $1^\circ 29'$ is for an anomaly of 50° and not 130° . The language of Hanover is unclear and doesn't allow understanding exactly his calculation.

⁸⁵ According to the theoretical formulas $\beta (50^\circ) = 1^\circ 29'$ and $\beta (130^\circ) = 1^\circ 33'$. Hanover's tables in Luhot ha-Ibbur and Tekhunot ha-Shamayim give the same data.

The calculation of Hanover is the following $\{ \tan [(A + B) / 2] \} (a - b) / (a + b) = \tan (A - B) / 2$.

The calculation is exact. $\log \tan 25^\circ = -0.361352725762$. He adds 10 and gets 9.6686725

However I cannot explain the values of Hanover for the log of the two numbers. Indeed $\log 96534.2727 = 4.98468159$ and $\log 103465.2727 = 5.01479460674$. There is certainly a mistake but the final result is even though correct. $9.6385614 = -0.36144046 = \log \tan (A - B) / 2$ Hence

$\tan = 0.44196323$ and $(A - B) / 2 = 23^\circ 31'$

י"ז.

הנה אחרי שהתבאר שיש שינוי במהלך השמש בכל יום, פעם להוסיף על מהלכו האמצעי או לגרוע ממנו מנת המסלול, נמשך מזה כי גם זולת ההבדל שיש בין היום האמצעי מהיום האמיתי⁸⁶ יש עוד הבדל בין הימים האמיתיים עד שלא יתכן שיהיו הימים האמיתיים שוים במידתם כי היום האמצעי הוא משך זמן כ"ד שעות והוא בכדי שיסוב גלגל משהו היום כולו שהוא ש"ס מעלה ועוד נ"ט חלקים ח' שניים⁸⁷, מה שחתנוע בשמש בגלגלו. והנה אם היה מהלך השמש מהלך שוה גם בערך אלינו, אזי היו מהלכו האמצעי ומהלכו האמיתי מהלך שוה בזאת הבחינה בלי ספק, ואולם לפי שמהלך השמש אינו מהלך שוה בערך אלינו, מבואר שיש הבדל ושינוי גם בין יום האמיתי ליום אמצעי זולתו⁸⁸, המשל אם היה השמש בנקודה מנקודות אופן חצי היום ויגיע עוד פעם אחר אל אופן חצי היום, אינם שוים במידתם. לכן התחכמו בעלי תכונה למצא דבר חפץ ודרך נאות לעשות מן הימים האמצעיים אמיתיים ע"י החיבור או חיסור איזה חלקים והוא שתוציא מנת המסלול ותעשה מהם חלקי השעה והוא ההבדל שבין יום האמצעי והאמיתי. ואם יהיה המסלול פחות מ-ק"פ מעלות תגרע מנת המסלול מיום האמצעי וישאר בידך יום האמיתי. ואם יהיה מסלול השמש יתר על ק"פ מעלות, עד ש"ס מעלות תוסיף מנת המסלול על יום האמצעי ויבא לך יום האמיתי כי זהו ההבדל העצמי שבין יום האמצעי והאמיתי בזאת הבחינה. והמסלול היותר גדול בתכלית הימים הוא כאשר יהיה מסלול השמש צ"ב⁸⁹ מעלות או רס"ח שהם המקומות האמצעיים שבין נקודה גובה רום ושפל רום. ויהיה אז ההבדל ח' חלקים י"ב שניים מ-ס' בשעה אבל אם המסלול ק"פ מעלות או ש"ס מעלות אין בהם שינוי כמו שהתבאר.

י"ח.

עוד יש שינוי אחר⁹⁰ בין ימים אמצעיים לימים אמיתיים וזה שאילו היה מהלך השמש תחת מהלך משהו היום אזי לא היה שינוי אחר בין היום האמצעי והאמיתי זולת השינוי אשר התבאר לעיל סימן י"ז. ואולם אחרי

⁸⁶ Apparently the author has in mind the fact that, until now his mean day is the true day at the equator; it begins at 6 a.m. true time and ends at 6 p.m. true time. By contrast the true day begins at 6a.m. – $\Delta/15$ and ends at 6 p.m. + $\Delta/15$. In the northern hemisphere Δ is positive in spring and summer and it is negative in autumn and winter. Now, from here onwards, the author examines the problem of the equation of time. He will thus consider the true day defined by the movement of the apparent sun and the mean day defined by the movement of the fictitious mean equatorial sun.

⁸⁷ In 24 hours (meantime) the sun makes two consecutive passages at the superior meridian corresponding to a movement of 360° but the vernal point (when we neglect the precession of the equinox) and any point of the equator moved by $360^\circ + 59' 8''$. If we define the sidereal time as the hour angle of the vernal point and the mean solar time as $12h +$ the hour angle of the mean equatorial sun we see that

The sidereal time = the mean solar time * 0.997270.

The mean solar time = the sidereal time * 1.002738.

⁸⁸ The author is now dealing with the equation of time. If we define it as $E = T_m - T$, thus mean time – true time (ancient definition) then $E = \alpha - l = (L - l) + (\alpha - L) = C + \rho$; where E is expressed in mean time L is the true solar longitude, l is the mean solar longitude and α is the true right ascension of the sun. The first term C is the equation of the center or the quota of the anomaly and ρ is the reduction to the equator.

Of course for a span of time the relation becomes $\Delta E = E - E_0 = \Delta\alpha - \Delta l = \Delta(L - l) + \Delta(\alpha - L)$.

In the present chapter 17, we examine the effects of C , the equation of the center.

⁸⁹ By differentiation of the formula $\beta = \arctan f(\alpha)$ with $f(\alpha) = (e_0 \sin \alpha) / (1 + e_0 \cos \alpha)$ we find:

$$d\beta / d\alpha = [1 / (1 + f^2(\alpha))] * [df(\alpha) / d\alpha]$$

$$d\beta / d\alpha = [1 / (1 + f^2(\alpha))] * [e_0 (e_0 + \cos \alpha) / (1 + e_0 \cos \alpha)^2].$$

The extrema of the function $\beta(\alpha)$ are reached for $\cos \alpha = -e_0$ corresponding to 91.98585° and 268.01415° . $\beta(92^\circ) = 1.9859^\circ$, thus $(L - l)_{\max} = 1.9859 = 1^\circ; 59'$ corresponding to 7m 57s. The text writes 8m 12s. Thus the difference between true and mean time, due to the effect of the non uniformity of the angular velocity of the sun on the ecliptic, never exceeds 8 minutes.

⁹⁰ In the present chapter 18, we examine ρ , the reduction to the equator.

שמהלך השמש הוא תחת גלגל המזלות בשוה ומהלכו בכל יום נ"ט חלקים ח' שניים ומדת היום הוא בכדי שיסוב גלגל משוה היום כולו ועוד קשת ממשוה היום כפי מה שיתנועע השמש ממערב למזרח וזה הקשת ממשוה היום פעם יהיה פחות מן הקשת אשר בגלגל המזלות ופעם יהיה יתר ממנו כמו שהתבאר לעיל סימן י"ב כי מן חצי שור עד חצי אריה וכן מן חצי עקרב עד חצי דלי יהיה הקשת ממשוה היום יותר גדול מן הקשת אשר בגלגל המזלות⁹¹ ויהיו הימים האמיתיים גדולים מן הימים האמצעיים.⁹² ומן חצי אריה עד חצי עקרב וכן מן חצי דלי עד חצי שור הנה קשת משוה היום אשר יגיע עד השמש באופן חצי היום בשוה יהיה פחות מן הקשת אשר בגלגל המזלות ויהיו הימים האמיתיים קצרים מן הימים האמצעיים ואחרי שהתבאר שהימים האמיתיים לפעמים הם יותר מן כ"ד שעות ולפעמים פחות מן כ"ד שעות לכן התחכמו בעלי התכונה למצא דרך להגיע אל שיעור ההבדל ההוא. והוא שתוציא העלייה הישרה למקום השמש האמיתי וההבדל שבין מקום השמש האמיתי ובין מעלות העלייה הישרה תעשה לשעות והוא ההבדל שבין הימים האמיתיים לימים האמצעיים ואם תהיה העלייה הישרה פחותה ממעלות מקום השמש האמיתי, תגרע ההבדל ההוא מן הימים האמצעיים. ואם מעלות מקום השמש האמיתי פחותה מהעלייה הישרה תוסיף ההבדל ההוא על הימים האמצעיים ויהיו בידך ימים אמיתיים. והבדל אשר בתכלית הגודל הוא ההבדל עשרה חלקים מ-ס' בשעה.⁹³

י"ט.

ומעתה אשכילך ואורך בדרך תמים⁹⁴ ואמשול לך משלים להבינך העילה בשינוי הראשון⁹⁵ מפני מה צריך לגרוע מנת המסלול אם יהיה המסלול פחות מ-ק"פ מעלות וכאשר יהיה המסלול יתר על ק"פ מעלות עד ש"ס

⁹¹ In chapter 12 the author examined the evolution of $d\alpha / d\lambda$ which can be <1 or >1 . See note 51.

$E = T_m - T$ represents the delay of the true time with regard to the mean time. Thus if E is increasing then the delay of true time with regard to mean time is increasing and it will be greater at the end of a day than at its beginning. This means that the true day is longer than the mean day. E will be an increasing function of the time if $dE / dt > 0$. But in this chapter we consider only ρ the reduction to the equator. Thus $E = \alpha - L$ and $dE/dt = d\alpha/dt - dL/dt$. In the area $45^\circ < L < 135^\circ$ $d\alpha > dL$, thus $dE/dt > 0$ and E is an increasing function of the time and the true days are longer than the mean days.

⁹² The study of the length of the true days through the year is in fact more delicate. If we consider the relation $E = C + \rho$, we can develop C and ρ in series. C , calculated according to the assumptions of the ancient astronomy (of Ptolemy or al-Battani) can be developed in serie. See Ajdler, J.J. The equation of time in ancient Jewish astronomy, B.D.D. 16, August 2005, p. 49 note 134. We can also develop C , calculated according to modern astronomy in serie: see Smart, Textbook on Spherical Astronomy, Chap. V Planetary Motion, formula 87. ρ can also be developed in serie: see Smart chap VI Time, formula 23.

The equation of time becomes then a serie see Smart chap VI Time, formula 29 and 30. See also Meeus, Astronomical Algorithms formula 27.3. If we consider the two main terms, the first of C and the first of ρ we get $E = 2 e \sin M - y \sin 2l$ according to modern astronomy. $e = 0.01673$, $y = \tan^2 (\epsilon/2) = 0.043056$, M is the solar mean anomaly measured from the perigee. $M = \alpha + 180^\circ$ where α is the anomaly of ancient astronomy measured from the apogee. The longitude of the perigee is 282.075° thus $l = 282.075^\circ + M$.

This gives $E = 2 e \sin M - y \sin 2(\omega + M) = 460.11^\circ \sin M - 592.06^\circ \sin 2(\omega + M)$.

$E_{\max} = 14m \ 22s$ on February 11 and $E_{\min} = -16m \ 23s$ on November 4.

The differentiation of the formula gives $dE / dt = 2 e \cos M \ dM / dt - 2 y \cos 2(\omega + M) \ dM / dt$. For the calculation of dM / dt we assume that **$dt = 1$ day.** $dM/dt = 2\pi / 365.2422 = 0.01720279$ radians/day.

This gives for the variation of the length of the day ΔE with regard to the average day of 24hours mean time:

$\Delta E = 7.91^\circ \cos M - 20.37^\circ \cos 2(\omega + M)$. $\Delta E_{\max} = +29.9$ s on December 23

$\Delta E_{\min} = -21.4$ s on September 17.

⁹³ Hanover estimates the greatest value of $(\alpha - L)$ to $10m$ or $2^\circ \ 30'$. According to Luhot ha-Ibbur II table 14 the greatest value of this difference is $2^\circ \ 29'$; it is reached for $l = 45^\circ$ to 47° . Thus a maximum difference of $10m$ is possible between true and mean time due to the effect of the reduction to the equator.

⁹⁴ According to Psalm 32; 8.

מעלה צריך להוסיף מנת המסלול. וכן העילה בשינוי השני⁹⁶, המשל נניח ביום מן הימים היה השמש באופן חצי היום והיה מקום השמש האמיתי בראש מזל סרטן⁹⁷ וגם שם היה מקום גובה הרום וא"כ מקום השמש האמיתי היה מקום האמצעי בשוה. ואחרי שלשים יום מן הימים האמצעיים שהם כ"ד שעות ביום, כאשר הגיע באופן חצי היום כבר התנועע השמש בימים ההם במהלכו האמצעי כ"ט מעלות ל"ד חלקים י' שניים והגובה התנועע בימים ההם ה' שניים וכפי זה יהיה אמצע השמש קי"ט מעלה ל"ד חלקים ה' שניים⁹⁸ והגובה היה דרך משל צ' מעלות. נחבר אליהן ה' שניים שהתנועע הגובה באלה השלשים יום, יהיה הגובה צ' מעלות ה' שניים. תגרע מקום הגובה ממקום האמצעי נשאר כ"ט מעלות ל"ד חלקים ה' שניים. תמצא מנת המסלול והוא נ"ח חלקים מ"ה שניים⁹⁹. ולפי שהמסלול הוא פחות מ-ק"פ מעלות, תגרע מנתו ממקום אמצע השמש, נשאר קי"ח מעלות ל"ה חלקים כ"ה שניים וזהו המקום השמש האמיתי. תחשוב העלייה הישרה ממקום שהיתה בתחילת החשבון, צ' מעלות תחבר אליהן שלשים פעמים נ"ט חלקים ח' שניים (והוא מה שיוסיף גלגל משוה היום להתנועע יתר על מסיבתו השלמה שהיא ש"ס מעלות) שהם כ"ט מעלה ל"ד חלקים י' שניים, יצא לך קי"ט מעלות ל"ד חלקים י' שניים. וזאת היא הנקודה ממשוה היום שלשים בשעה י"ב ביום באופן חצי היום. ותחשיב ג"כ העלייה הישרה ממקום השמש האמיתי והוא המקום שנמצא השמש שם אחרי שלשים יום, יצא לך ק"ך מעלה מ"ג חלקים י"ט שניים וההבדל שביניהם הוא מעלה אחת ט' חלקים ט' שניים. נמשך מזה שבעת ההיא היה השמש עדיין בפאת מזרח מאופן חצי היום ויש עוד שהות משך זמן [י"]¹⁰⁰ ד' חלקים ל"ז שניים מחלקי השעה עד שיגיע השמש עצמו עם נקודה מנקודות משוה היום בשוה באופן חצי היום שאז הוא יום אמיתי. על כן צריך להוסיף על הזמן האמצעי, לפי שכאשר הגיע האמצעי באופן חצי היום לא היה חצי היום אלא בבחינת הזמן האמצעי, ואולם בבחינת הזמן האמיתי לא היה עדיין אלא ה' שעות ביום ו-נ"ח חלקים ו-כ"ג שניים והוא ד' חלקים ל"ז שניים קודם חצי היום האמיתי. ואחרי אשר הית מתנהג כאשר התבאר והוא שגרעת בשינוי ראשון מן האמצעי ההבדל שבין מקום האמיתי למקום האמצעי שהוא נ"ח חלקים מ"ה שניים לפי שמסלול השמש הוא פחות מ-ק"פ, גם הוספת על האמצעי ההבדל השני מה שהוא בין המקום האמיתי מן העלייה הישרה ממקום האמיתי והוא שתי מעלות ז' חלקים נ"ד שניים, לפי שהעלייה הישרה היא יתירה ממקום האמיתי לכן התבונן כי בעבור שההבדל הראשון הוא לגרוע וההבדל השני הוא להוסיף על כן תגרע זה מזה וישאר מעלה אחת ט' חלקים ט' שניים להוסיף וכמו שהתבאר למעלה והבן זה.

משל אחר¹⁰¹, נניח שקיעת השמש תהיה היום באופק ישר בראש גדי וגם מקום שפל רום היה שם ומבואר כי מקום האמצעי והאמיתי הוא ר"ע מעלה בשוה והיתה העת ההיא שש שעות אחר חצות היום ונניח שהשמש התנועע משם והלאה משך זמן ארבעים יום מימים אמצעיים ומהלכו בזמן ההוא ל"ט מעלות כ"ה חלקים ל"ג

⁹⁵ The equation of the center.

⁹⁶ The reduction to the equator.

⁹⁷ Thus initial situation: anomaly = 0; $l = 90^\circ$, $L = 90^\circ$. $E = C + \rho$ with $C = L - l = 0$ and $\rho = \alpha - L = 0$
Final situation, 30 days later: Apogee $90^\circ 5''$, Anomaly $29^\circ 34' 5''$, $l = 119^\circ 34' 10''$, $L = 119^\circ 34' 10'' - 57' 04'' = 118^\circ 37' 06''$. $\text{Tang } \alpha = \text{tang } L * \cos \epsilon$ so $\alpha = 120^\circ 45' 07''$. $C = L - l = -57' 4''$ and $\rho = \alpha - L = 2^\circ 8' 1''$. $E = \text{mean time} - \text{true time} = \alpha - l = 1^\circ 10' 57'' = 4 \text{ m } 44\text{s}$. Thus at mean noon it is 11h 55m 16s true time. The span of time of 30 mean days is shorter than the span of time of the 30 true days because at the end of the 30th mean day the 30th true day was not yet completed. The calculations of the author differ slightly from our calculations for the following reasons: He worked with tables requiring interpolation for trigonometric functions and astronomical functions and, in the case of multiplications and divisions, with logarithmic tables requiring interpolation. We will not go on checking all the calculations.

⁹⁸ $10''$ and not $5''$

⁹⁹ The exact calculation of β ($29^\circ; 34' 5''$) = $0.9510^\circ = 57' 04''$ slightly different than the value of $57' 45''$.

¹⁰⁰ This is certainly a *lapsus calami* as we find later the equation of time of 4m 37s in the text.

¹⁰¹ Initial situation: apogee at 90° , $l = L = 270^\circ = \text{perigee}$. Anomaly 180°

Final situation 40 mean days later: $l = 309^\circ 25' 33''$; $\beta = -1^\circ 20' 9''$. This last value is uncorrect, the exact calculation is $-1^\circ 17' 43''$ but we will continue with the author's β . Therefore $L = 310^\circ 45' 42''$; $\alpha = 313^\circ 13' 38''$ (40'' is more precise but we will ignore the difference). $\alpha - l = 3^\circ 48' 5'' = 15\text{m } 12\text{s}$. Thus at 6 p.m. mean time it is only 5h 44m 48s true time. The author gives a concrete physical explanation: he transports himself at the equator in order to avoid the term Δ : at sunset, the equatorial mean sun of longitude l sets before the true sun of longitude L and right ascension α and the difference $\alpha - l$ is the delay between the mean sunst and the true sunset.

שניים ומהלך הגובה יהיה בזמן ההוא ו' שניים. תחבר מהלך אמצע השמש בארבעים יום על ר"ע מעלה אשר היה שם המקום האמיתי קודם הארבעים יום יהיה בידך ש"ט מעלות כ"ה חלקים ל"ג שניים. ומקום הגובה שהיה בתחילה דרך משל צ' מעלות יהיה אחרי הארבעים יום צ' מעלות ו' שניים. תגרע מקום הגובה ממקום האמצעי, ישאר רי"ט מעלות כ"ה חלקים כ"ז שניים והוא מסלול השמש ומנתו מעלה אחת כ' חלקים ט' שניים. ולפי שהמסלול הוא יתר מ-ק"פ, תוסיף מנת המסלול על המקום האמצעי והוא ש"י מעלות מ"ה חלקים מ"ב שניים. תוציא השקיעה הישרה למקום האמיתי מן השמש שהיה בתחילה על האופק בנקודת השקיעה והוא ר"ע מעלה ממשוה היום ואחרי ארבעים יום התנועע משוה היום ארבעים פעמים ש"ס ונוסיף עליהם עוד ארבעים פעמים נ"ט ח' שהם ל"ט מעלות כ"ה חלקים ל"ג שניים. תחבר אותן על ר"ע מעלות שהייתה אז נקודת השקיעה בתחילת הארבעים יום בהיות השמש באופק המערבי והוא ש"ט מעלות כ"ה חלקים ל"ג שניים. תוציא השקיעה הישרה ממקום האמיתי והוא המקום שנמצא השמש שם אחרי הארבעים יום, יצא לך שי"ג מעלות ל"ג חלקים ל"ח שניות והיא הנקודה ממשוה היום אשר תגיע עם השמש עצמו באופק הישר והם ימים אמיתיים. ואולם כפי הימים האמצעיים הנקודה ממשוה היום אשר תגיע אל האופק תהיה רק ש"ט מעלות כ"ה חלקים ל"ג שניים, ובעת ההיא עדיין השמש למעלה מן האופק בכדי ג' מעלות מ"ח חלקים ה' שניים ועדיין יש שהות בכדי ט"ו חלקים י"ב שניים מחלקי השעה עד שיגיע השמש אל האופק ובעבור זה צריך להוסיף על הזמן האמצעי ט"ו חלקים ו-י"ב שניים מחלקי שעה עד שיגיע השמש עצמו אל האופק עם איזו נקודה מנקודות משוה היום בשוה שהרי כאשר הייתה הנקודה ממשוה היום באופק המערבי בבחינת הזמן האמצעי עדיין לא עברו שש שעות שלמים אחרי חצות היום האמיתי. אבל לא היו רק ה' שעות מ"ד חלקים מ"ח שניים בבחינת הזמן האמיתי שהם שש שעות פחות ט"ו חלקים י"ב שניים. ואחר שנתבאר בנקל תוכל להתבונן עילת מה שמוסיפין מנת המסלול על המקום האמצעי בהבדל הראשון גם בהבדל השני שבין מקום האמיתי לעלייה הישרה שהוא שתי מעלות כ"ז חלקים נ"ו שניים ובעבור שהעלייה הישרה היא יתירה ממקום האמיתי על כן צריך להוסיף היתרון על הזמן האמצעי. ולפי ששניהם הם להוסיף תחברם יחד והם ג' מעלות מ"ח חלקים ה' שניים¹⁰² וזה ברור. ולקצר מעשה החשבון בהבדלים האלה, הנה תוכל לגרוע מקום אמצע השמש מן העלייה הישרה למקום האמיתי או בהפך, אם המקום האמצעי הוא פחות מן העלייה הישרה יהיה ההבדל להוסיף ואם המקום האמצעי הוא יתר על העלייה יהיה ההבדל לגרוע מן האמצעי ויהיה בידך יום אמיתי. והנה במשל הראשון שמקום האמצעי הוא קי"ט מעלה ל"ד חלקים י' שניים והעלייה הישרה ממקום האמיתי הוא ק"כ מעלה מ"ג חלקים י"ט שניים, תגרע המעט מן הרב, ישאר מעלה אחת ט' חלקים ט' שניים¹⁰³ ולפי שמקום האמצעי הוא פחות מהעלייה הישרה יהיה ההבדל להוסיף¹⁰⁴ וכן במשל השני שמקום האמצעי הוא ש"ט מעלה כ"ה חלקים ל"ג שניים והעלייה הישרה ממקום האמיתי הוא שי"ג מעלות י"ג חלקים ל"ח שניים, תגרע זה מזה, ישאר ג' מעלות מ"ח חלקים ה' שניים¹⁰⁵ ולפי שמקום האמצעי הוא פחות מן העלייה הישרה לכן יהיה ההבדל להוסיף כמו שהתבאר.

כ'.

¹⁰² $\alpha - l = (\alpha - L) + (L - l) = (\alpha - L) + \beta = 2^\circ 27' 56'' + 1^\circ 20' 09'' = 3^\circ 48' 5''$.

¹⁰³ $T_m - T = \alpha - l = 1^\circ 9' 9'' = 4m 37s$, according to the author's calculations which are slightly different from our own calculations: see above. Thus at mean noon it is only 11h 55m 23s a.m.

¹⁰⁴ If $E = \alpha - l = T_m - T > 0$ then $T = T_m - E$. Hanover writes that $T_m = T + E$. We must add E to T to get T_m . As he explained when the mean sun is at the meridian the true sun is still $3^\circ 48' 5''$ in the east, we must add 15m 12s to the true time to get the mean time.

¹⁰⁵ $T_m - T = \alpha - l = 3^\circ 48' 5'' = 15m 12s$. Thus at mean noon it is only 11h 44m 48s a.m. and at 6 p.m. mean time and according to the image of the author, who transport himself at the horizon of the area with the same geographical longitude, at the equator, when the mean equatorial sun sets at the right horizon, the true sun is still $3^\circ 48' 5''$ above the horizon. When the true sun sets, the mean sun is already $3^\circ 48' 5''$ under the horizon. Thus at the equator, at 6p.m. it is still 5h 44m 48s p.m. mean time.

וכל מה שאמרנו כאשר נתחיל חשבון היום מאופק השקיעה באופק ישר או נתחיל מאופק חצי היום שהוא שוה בכל המדינות. ואולם אם ניישר החשבון בשתי המדינות הנוטות ממשוה היום ונתחיל החשבון מעת השקיעה הוא בהיות השמש באופק המערבי יהיה עוד שינוי אחר. וזה השינוי משתנה בפחות ויתר כפי האופקים, כי כאשר יהיה השמש בראש טלה ובראש מאזנים לא יהיו רק שני השינויים הנזכרים בכל מדינה ממדינות הנוטות לצפון כי אז יהיה היום והלילה שווים בכל האופקים כמו שהם באופקי קו המשוה כאשר התבאר לעיל ס' י"ג. אמנם בהאופקים הנוטים לצפון ישתנו הימים והלילות כאשר יהיה השמש בשאר המזלות זולת טלה ומאזנים כמו שהתבאר לעיל ס' י"ד וס' ט"ו וס' י"ו. לכן יהיה בהם עוד שינוי אחר.¹⁰⁶ והשינוי הזה תמצא כשתגרע עליית המטאלע אשר באופק נוטה מן העלייה אשר האופק ישר¹⁰⁷ או שתגרע שקיעת המגראב אשר באופק נוטה מן השקיעה אשר באופק ישר¹⁰⁸ כמו שהתבאר לעיל בס' ט"ו וס' י"ו אם המגראב משקיעת מקום השמש האמיתי הוא יתר על השקיעה אשר באופק ישר. הנה כפי זה עוד יש שהות משש שעות ומעלה אחרי חצות היום (ר"ל שעדיין יש שהות אחרי עת השקיעה שבאופק ישר עד שיגיע המגראב או השמש עצמו על האופק במדינה הנוטה לצפון) וצריך להוסיף זה השינוי על האמצעי. ואם שקיעת המגראב באופק נוטה היא פחותה מן השקיעה שהאופק הישר וזאת כאשר תהיה שקיעת החמה באופק נוטה קודם שש שעות אחר חצות היום וא"כ תהיה בו השקיעה קודם השקיעה שבאופק ישר, לכן צריך לגרוע הזמן האמצעי בכדי שיעור מה שהקדים השמש לשקוע באופק נוטה קודם שקיעתו האופק הישר.¹⁰⁹

כ"א.

אתה הוראית לדעת¹¹⁰ כי שלשה מיני שינויים הם בין הזמן האמצעי לזמן האמיתי וכדי לחבר שלשתם יחד תעשה ככה, תגרע מקום אמצע השמש ושקיעת מעלות המשוה ממקום האמיתי¹¹¹ שבאופק הנוטה ומה שנשאר מן השינוי תעשה לשעות. אם שקיעת המגראב יתר על המקום האמצעי תוסיף מנת השינוי על הזמן האמצעי ואם שקיעת המגראב פחות ממקום האמצעי תגרע מנת השינוי מזמן האמצעי ובעת ההיא יגיע השמש אל האופק באופק נוטה והוא הזמן האמיתי אשר בקשנו. והנה במשל הראשון¹¹² היה אמצע השמש קי"ט מעלות ל"ד חלקים י' שניים והיה מקום האמיתי קי"ח מעלות ל"ה חלקים כ"ה שניים והעלייה באופק ישר הייתה ק"כ מעלות מ"ג חלקים י"ט שניים ושקיעת המגראב באופק ירושלים שרחבה צפונית ל"ב מעלה, הייתה קל"ד מעלות נ"ד חלקים נ"ה שניים.¹¹³ תגרע מקום האמצעי מן המגראב שבאופק ירושלים נשאר ט"ו מעלות כ' חלקים מ"ה שניים. ולפי ששקיעת המגראב היא יתר על מקום האמצעי תהיה מנת השינוי להוסיף, ובעבור שהשינוי שבין השקיעה הישרה ובין המגראב באופק נוטה הוא י"ד מעלות י"א חלקים ל"ו שניים שהם נ"ז חלקים מחלקי השעה פחות כ"ד שלישיים לכן בזה השיעור תקדים שקיעת האופק הישר לשקוע קודם שקיעת אופק ירושלים. והזמן האמצעי היה במשל הזה קודם שקיעת הזמן האמיתי באופק ישר בכדי מעלה אחת ט'

¹⁰⁶ Already mentioned in the beginning of chapter 17. See note 86.

¹⁰⁷ $\alpha - (\alpha - \Delta) = \Delta = \arcsin(\tan \varphi * \tan \delta) = \arcsin(\tan \varphi * \tan \varepsilon * \sin \alpha)$. It is the difference of sunrise with regard to 6 a.m.

¹⁰⁸ $\alpha - (\alpha + \Delta) = -\Delta$. It is the difference of sunset. It is the difference of sunset with regard to 6 p.m.

¹⁰⁹ Sunset at the right horizon is always at 6 p.m. true time.

¹¹⁰ Deut 4; 35.

¹¹¹ $\alpha - L = \rho$, the reduction to the center and $L - l = C$, the equation of the center.

¹¹² $L = 118^\circ 35' 25''$; $l = 119^\circ 34' 10''$; $\alpha = 120^\circ 43' 19''$; Magrab = $134^\circ 54' 55''$.

Maghrab - $l = 15^\circ 20' 45''$. Maghrab - $\alpha = 14^\circ 11' 46''$.

Thus $\Delta = 14^\circ 11' 36''$ or 56m 46s. Thus sunset is at 6h 56m 46s p.m true time.

$E = C + \rho = \alpha - l = 1^\circ 9' 9'' = 4m 37s$. Mean time precedes true time, thus at this moment it is already 7h 1m 23s mean time. Thus sunset is at 6h 56m 46s p.m.true time or 7h 1m 23s mean time.

$\alpha + \Delta - l = 15^\circ 20' 45''$ corresponding to 61m 23s. All of this according to Hanover's calculations. But using the formula $\sin \Delta = \sin \alpha * \tan \varepsilon * \tan \varphi$, it comes out that $\Delta = 13^\circ 30' 26''$, and this affects somewhat the results above.

¹¹³ The variation during one day, for example from noon until sunset, is negligible.

חלקים ט' שניים כמו שהתבאר ס' י"ט' במשל הראשון. וא"כ השקיעה באופק ירושלים בכדי שתי ההוספות שהן ט"ו מעלה כ"ה חלקים מ"ה שניים¹¹⁴ וכמו שהתבאר. וכן הדין במשל השני שהיה מקום האמצעי ש"ט מעלות כ"ה חלקים ל"ג שניים ומקום האמיתי היה ש"י מעלות מ"ה חלקים מ"ב שניים והשקיעה האמיתית באופק משוה היום היתה ש"ג מעלות י"ג חלקים ל"ח שניים.¹¹⁵ ושקיעת המגראב באופק ירושלים היתה ש"א מעלות מ"ח חלקים נ"ז שניים,¹¹⁶ תגרע המגראב ממקום האמצעי, נשאר ז' מעלות ל"ו חלקים ל"ו שניים.¹¹⁷ ולפי ששקיעת המגראב היתה פחות ממקום האמצעי, תגרע השינוי ההוא מן הזמן האמצעי ויצא לך השקיעה האמיתית. וכל זה לפי שהשינוי שבין השקיעה הישרה ובין המגראב באופק ירושלים הוא י"א מעלות כ"ד חלקים מ"א שניים.¹¹⁸ ובכדי השיעור הזה יקדים השמש לשקוע באופק ירושלים קודם שקיעתו באופק הישר, להיות כי הזמן האמצעי היה קודם השקיעה האמיתית באופק ישר בכדי ג' מעלות מ"ח חלקים ה' שניים כמו שהתבאר. נמשך מזה שהשקיעה האמיתית באופק ירושלים הקדימה לפני הזמן האמצעי בכדי ז' מעלות ל"ו חלקים ל"ו שניים. והיינו כשתגרע ג' מעלות מ"ח חלקים ה' שניים מן י"א מעלות כ"ד חלקים מ"א שניים, והבן זה.¹¹⁹

והשינוי שבאופק ירושלים שאפשר להיות בתכלית גדלו בזמנים האלה הוא כאשר יהיה מקום השמש האמיתי ב-ט"ו מעלה ממזל קשת¹²⁰ שאז הוא קרוב לשפל רום שהוא בזמנינו זה ז' מעלות ל"ו חלקים במזל גדי¹²¹ ובמקום הזה היה השינוי בתכלית הגודל והוא י"ז מעלות י' חלקים והשינוי הוא לגרוע מזמן האמצעי¹²² וכן הדין ב-ט"ו מעלה ממזל סרטן¹²³ שאז הוא קרוב לגובה הרום שהוא בזמנינו זה ז' מעלות ל"ו חלקים בו¹²⁴ ואז לא יהיה השינוי רק ט"ז מעלות כ' חלקים והוא להוסיף.¹²⁵

כ"ב.

וכאשר יהיו מוכנים לפניך השינויים שבין הזמן האמצעי לזמן האמיתי, כמה מעלות וכמה חלקים הם ממעלות משוה היום, תחברם לשעה, כאשר יהיה בידך ט"ו מעלות [ב' חלקים] וכ"ח שניים או תעשה מהן חצי שעה אם יהיו ז' מעלות ל"א חלקים י"ב שניים בקירוב (שהרי גלגל משוה היום הוא ש"ס מעלה המסבב ממזרח

¹¹⁴ $C + \rho + \Delta = 1^\circ 9' 9'' + 14^\circ 11' 36'' = 15^\circ 20' 45''$. Hanover however writes $15^\circ 25' 45''$. It must be a scribal error. Indeed we found above $\text{Maghrab} - l = \alpha + \Delta - l = E + \Delta = 15^\circ 20' 45''$ or 61m 23m. Sunset is at 7h 1m 23s.

¹¹⁵ $\alpha = 313^\circ 13' 38''$.

¹¹⁶ $\alpha + \Delta = 301^\circ 48' 57''$ so $\Delta = -11^\circ 24' 41''$. Using the formula, $\Delta = \arcsin(\sin \alpha * \tan \varepsilon * \tan \varphi) = -11^\circ 25' 6''$, which is fairly close to the Hanover's Δ .

¹¹⁷ $\alpha + \Delta - l = -7^\circ 36' 36''$

¹¹⁸ $\Delta = -11^\circ 24' 41''$. $\alpha - l = C + \rho = 3^\circ 48' 5''$. $C + \rho + \Delta = 3^\circ 48' 5'' - 11^\circ 24' 41'' = -7^\circ 36' 36''$ corresponding to 30m 26s.

¹¹⁹ $\Delta = -11^\circ 24' 41''$ means that sunset is 45m 38s before 6 p.m. at 5h 14m 22s p.m. true time.

$E = 3^\circ 48' 5'' = 15m 12s$. Mean time precedes true time. Thus at this moment it is already 5h 29m 34s mean time. At sunset it is **5h 29m 34s p.m. mean time**.

¹²⁰ $L = 255^\circ$. This statement seems uncorrect.

¹²¹ According to Hanover, the longitude of the perigee was in his days $\omega = 277^\circ 36'$.

¹²² $E = 17m 10s$. According to Hanover it would be on about December 6. In fact $E_{\max}$ is 14m 22s on February 11. Since $E = T_m - T$, therefore $T = T_m - E$. So when $E > 0$, Hanover subtracts E from the mean time to get the true time. And when $E < 0$, Hanover adds the absolute value of E to the mean time to get the true time.

¹²³ 105° . This statement seems uncorrect.

¹²⁴ The longitude of the apogee was at his time $97^\circ 36'$.

¹²⁵ $E = -16m 20s$. According to Hanover, it would be on about July 6. In fact $E_{\min}$ is $-16m 23s$ on November 4. Ptolemy and al-Battani had already recognized that the maximum of E is at about 320° on about February 10 and the minimum of E is at about 220° on the beginning of November.

למערב כולו, ונוסף עליו עוד קשט נ"ט חלקים ו-ח' שניים ו-י"ט שלישיים ו-מ"ח רביעיים בקירוב בכדי מה שהתנועע השמש ממערב למזרח מה שהסב גלגל משה היום בזמן כ"ד שעות יתר על ש"ס מעלות. נמשל מזה כי בשעה אחת מ-כ"ד שעות יתנועעו ט"ו מעלה ושני חלקי מעלה ו-כ"ח שניים ממשוה היום ובחצי שעה יתנועעו ז' מעלות ל"א חלקים י"ד שניים ממשוה היום)¹²⁶ והיוצא מהם זהו מה שאתה צריך להוסיף או לגרוע מזמן האמצעי¹²⁷ אשר הונח בידך. והנה הארכתי כ"כ בשינוי הימים האמיתיים לתועלת המעיין להבין הדבר על בוריו ולהעמידו על האמת, כי בדבר הזה נסתבכו כל מפרשי דברי הרמב"ם ז"ל ומחלוקת גדול בין בעלי תכונה¹²⁸ לכן הארכתי במופתים וראיות ומשלים ודמיונות ונסיונות למען יכירו וידעו כי אמת נכון הדבר¹²⁹ כאשר דיברתי, אין בהם נפתל ועקש¹³⁰ שאין מקום לבלעזן לחלוק.

כ"ג.

אחרי אשר דיברנו ממהלך השמש וחקרנו על השינוי שיש בין הימים האמצעיים והאמיתיים במה שיש בו די, יאות לנו לדרוש ולחקור ג"כ על מהלך הירח ולדבר על השינויים והסיבובים שנמצאו בו. וראוי שתדע כי כל השינויים שנמצאו במהלך השמש גם הם נמצאו במהלך הירח כי גם הירח מתנועע הכרחית ממזרח למערב¹³¹ מפאת התנועה היומית כמו השמש. גם יש לו תנועה עצמית ממערב למזרח¹³² והוא מהלך הירח בגלגלו ונמצאו בו עוד שינויים אחרים אשר לא נמצאו במהלך השמש עד שמפני זה אמרו רז"ל שמש ידע מבוא, ירח לא ידע מבוא.¹³³ והנה כאשר חקרו בעלי תכונה מצאו בחקירתם שהירח הוא כדור עכור ואין בו אור מפאת עצמו אבל הוא מקבל אורו מהשמש אשר הוא תחת האופק. ולפי שהירח הוא למעלה מן האופק ומקבל אורו מן השמש לכן הוא משליך ניצוצות על האופק במקום שאין השמש יוכל להשליך ניצוצות לשם כעניין מראה מלוטשת המקבלת אור מן השמש ומשלכת ניצוצות במקום הצל שאין ניצוצי השמש יכולים להגיע לשם בעת ההיא. והתבאר להם זה לפי שראו בעת הקיבוץ והוא כאשר יתקבצו השמש והירח בחלק אחד או בנקודה אחת מגלגל המזלות שאז יהיה הירח תחת השמש בשוה. הנה בעת ההיא אין אור הירח נראה לארץ לגמרי לפי

¹²⁶ Here Hanover insists on the difference between the sidereal time (he never defined this concept explicitly) and the mean time. During 24 hours mean time the sun passes twice through the superior or the inferior meridian but its longitude increases by $360^{\circ} 59' 8''$. Therefore in 24 hours the sun makes a complete rotation but a point of the equator like, the vernal point covers $360^{\circ} * 1.002738$. Thus in an hour the sun covers 15° but the vernal point turns by $15^{\circ} * 1.002738 = 15^{\circ} 02' 28''$. Thus the apparent angular velocity of the equator is greater than the apparent angular velocity of the sun because of its own movement opposite to the diurnal movement. Therefore, Hanover thought that all the quantities considered in E refer to a point of the equator turning faster than the sun and therefore E in degrees should be reduced in mean time by multiplication by $4 * 0.997270$. The author writes indeed that $15^{\circ} 28'$ of the equator corresponds to an hour. In fact it is a lapsus calami, it must be $15^{\circ} 02' 28' = 15.0411$ as he writes himself later in this chapter, and $15.0411 * 4 * 0.997270 = 60m = 1$ hour. But in fact we have here a **reasoning mistake**: $E = T_m - T$ means that E is measured in solar time and therefore $1^{\circ} = 4$ minutes of solar time and there is no necessity to multiply by 0.99727.

¹²⁷ $E = T_m - T$ in this book. Thus $T = T_m - E$, and if $E > 0$ it must be subtracted and if it is < 0 it must be added.

¹²⁸ The scholars of the 16th and 17th century were indeed much divided about the equation of time. Hanover, who knows perfectly the elements of the ancient astronomy, is apparently not aware of the treatment of the equation of time in ancient astronomy (Ptolemy, al-Battani) and he follows the modern theory introduced by Flamsteed. Hanover masters completely the subject; however he does not situate correctly the positions of the extrema of E.

¹²⁹ Deut 13 ; 15 and 17 ; 4.

¹³⁰ Prov 8 ; 8.

¹³¹ Clockwise

¹³² Counterclockwise.

¹³³ Psalm 104; 19 and B. Rosh ha-Shanah 25a.

שחלק המאיר ממנו פונה למעלה לצד השמש והחלק הבלתי מאיר הוא נוטה למטה. על כן נסתר אורו מעינינו וכאשר נעתק הירח מן השמש נאצל מעט מאורו לנגד עינינו וכל עוד שהירח מתרחק מן השמש כן ירבה וכן יפרוץ¹³⁴ אורו ומתפשט והולך עד אמצע החודש בעת שהירח הוא בתכלית המרחק מן השמש שהוא מרחק חצי גלגל בריחוק (מ)מזרח ממערב. בעת ההיא כאשר השמש שוקע במערב אזי הירח נראה במזרח ואז נראה הירח במילואו ומשם והלאה יתנועע הירח להתקרב אל השמש והוא הולך וקרב עד אשר יתקבץ עם השמש פעם שנית (וכן גם אורו פוחת והולך עד שאין אורו נראה על הארץ) והוא אחרי כ"ט יום וחצי בקירוב. ובעבור זה הסכימו ג"כ שגלגל הירח הוא למטה מגלגל השמש ואמרו שהירח הוא בגלגל התחתון והנה הוא בגלגל הרביעי מלמטה למעלה וברוב החקירה ועיון מצאו עוד שיש שינוי זמן בין עת קיבוץ השמש והירח ובין עת קיבוצם פעם אחרת, רצוני לומר שאין ביניהם זמן מוגבל תמיד אבל יש בהם הבדל בפחות ויתר גם עת הניגוד והוא בהיות הירח נגד השמש והוא בהתרחקו ממנו ק"פ מעלות שהוא תכלית המרחק. הנה גם הריחוק הזה לא יתהווה תמיד בזמן אחד מוגבל, אבל נבדל זה מזה בפחות ויתר. וכאשר התחכמו על זה הסכימו שיש שני גלגלים לירח הא' הוא גלגל המקיף את העולם ר"ל שהארץ בתוכו¹³⁵ ומתנועע למזרח¹³⁶ והשני הוא גלגל קטן שאינו מקיף את העולם ר"ל שאין הארץ בתוכו. ומרכז הגלגל הקטן הזה קבוע בגלגל הגדול וקראוהו בשם גלגל ההקפה¹³⁷ לפי שמרכזו קבוע בהקף הגלגל הגדול עד שמרכז הגלגל הקטן מתנועע ממערב למזרח¹³⁸ בתנוע הכרחית ע"י תנועת הגלגל הגדול. והגלגל הקטן הנקרא גלגל ההקפה גם הוא מתנועע תנועה עצמית ובו הירח קבוע ומתנועע עמו בהקיפו. וסדר תנועתו הוא כך, בחצי העליון של גלגל הקטן היוצא מגלגל הגדול ופונה למעלה נגד המזלות, מתנועע הירח ממזרח למערב¹³⁹ הפך דרך המזלות. ובחצי הפונה למטה נגד הארץ מתנועע הירח ממערב למזרח כסדר המזלות. המשל בצורה ט, נקודת ט תהיה מרכז גלגל אבגד שהוא גלגל המזלות ועגולת הוזה הוא גלגל השמש. והשמש עצמו בנקודת ה ועגולת כעצפ הוא גלגל הירח הנקרא גלגל הנושא¹⁴⁰ לפי שמשאית את מרכז גלגל ההקפה. ועגולת למנס הוא גלגל ההקפה ונקודת כ הוא מרכז גלגל ההקפה והמרכז הזה מתנועע ממערב למזרח רצוני לומר מנקודת כ אל נקודת מ, ומנקודת מ אל נקודת ע וכן מתנועע והולך עד שהוא חוזר חלילה. ובעגולת גלגל ההקפה עצמו מתנועע הירח מנקודת מ עד נקודת ל ועד ס ועד נ ובזה הדרך תמצא כי בחצי העליון מגלגל ההקפה הוא מתנועע לפאת מערב ובחציו התחתון מתנועע לפאת מזרח. ומהלך מרכז גלגל ההקפה אשר בגלגל הגדול נקרא מהלך אמצא הירח וע"י כלי העיון מצאו כי הזמן שיתנועע מרכז ההקפה הזה בכל הגלגל הגדול מנקודה לנקודה הוא כ"ז ימים ח' שעות בקירוב (והוא מהלך שוה בכל יום בכדי י"ג מעלה י' חלקים ל"ה שניים ושלישי אחד ו-מ"ח רביעיים) ולפי שהשמש כבר התנועע גם הוא בזמן ההוא עד נקודת ק והוא כ"ז מעלה בקירוב, א"כ כאשר הגיע הירח אל הנקודה הראשונה מהגלגל שמשם התחיל להתנועע שהוא מניין ש"ס מעלה לא מצא השמש בנקודה ההיא לפי שכבר התרחק השמש להתנועע ממנה והלאה בשיעור כ"ז מעלה כמו שהתבאר. א"כ צריך שיתנועע הירח עוד מן הנקודה ההיא והלאה עד שיגיע אל נקודת ש שהוא מקום השמש ויהיה שם הקיבוץ בנקודות ק ש. לכן אמרו בעלי התכונה כי מזמן הקיבוץ האמצעי עד זמן הקיבוץ אחר הוא כ"ט יום י"ב שעות תשצ"ג חלקים בקירוב והוא נקרא מולד אמצעי. ולפי שהירח עצמו יתנועע בגלגל ההקפה פעם למערב והוא כאשר יהיה בחלק העליון ממנו ופעם יתנועע למזרח והוא כאשר יהיה בחלק התחתון ממנו. והוא מתנועע בגלגל הזה בכל יום בכדי י"ג מעלות ג' חלקים נ"ג שניים נ"ה שלישיים מ"ח רביעיים. מבואר מזה שאם היה הירח עצמו במולד הראשון מכוון תחת השמש לא יתכן שיהיה מכוון תחתיו במולד שאחריו שהרי כאשר היה המולד הראשון מכוון בנקודת כ והירח עצמו היה בנקודת ל מגלגל ההקפה והשמש היה בנקודת ה וא"כ מבואר שהיו השמש והירח גם מרכז גלגל ההקפה שלושתם בנקודה אחת מגלגל המזלות והיה מולד האמצעי גם מולד האמיתי ברגע אחת (כי מולד האמצעי הוא כאשר יהיה מרכז גלגל ההקפה מכוון תחת מרכז השמש האמצעי בשוה ומולד

¹³⁴ Exodus 1 ; 12.

¹³⁵ Deferent

¹³⁶ Counterclockwise.

¹³⁷ Epicycle.

¹³⁸ Clockwise.

¹³⁹ The epicycle turns clockwise. Therefore an external point of the epicycle gives the impression, seen from the earth, to move clockwise while an internal point of the epicycle seems, from the earth, to move counterclockwise

¹⁴⁰ Deferent.

האמיתי הוא כאשר יהיה מרכז הירח עצמו מכוון תחת מרכז השמש האמיתי בשוה) והנה במולד שאחריו כבר התנועה השמש מנקודת ה עד נקודת ק ובזמן ההוא התנועה מרכז גלגל ההקפה כל גלגלו ועוד קשת כש עד שיגיע תחת השמש כי שם מולד השני שהוא מולד האמצעי והוא קיבוץ שק שהרי בזמן ההוא כבר התנועה הירח עצמו בגלגלו את כל גלגלו ועוד נוסף עליו קשת רת שהוא כ"ה מעלה חמישים חלקים¹⁴¹ ממעלת גלגלו. המבואר מזה כי בעת שיגיע מרכז גלגל ההקפה תחת השמש בשוה מפאת תנועתו ממערב למזרח כבר היה הירח עצמו בחצי העליון מגלגלו בפאת מערב מהשמש וצריך שמרכז גלגל ההקפה יתנועע עוד זמן מה עד שיגיע הירח עצמו תחת השמש שהוא מולד האמיתי. והנה במשל הזה יהיה מולד האמיתי אחר מולד האמצעי ולפעמים יהיה מולד האמיתי קודם מולד האמצעי, כי נניח שהיה הירח בנקודת ג מגלגל ההקפה שהוא חלק התחתון ממנו בעת אשר היה מרכז גלגל ההקפה שהוא נקודת כ תחת מרכז השמש בשוה שהוא נקודת ה ואז היו ג"כ המולד האמצעי עם המולד האמיתי ברגע אחת. ואולם במולד האמצעי כבר התנועה השמש עד נקודת ק ומרכז גלגל ההקפה כבר התנועה סביבות כל גלגל הנושא ועוד נוסף עליו קשת כש עד הגיעו תחת השמש והוא מולד האמצעי ואין ספק כי בתוך הזמן כבר התנועה הירח עצמו את כל גלגל ההקפה ועוד קשת גי. התבאר מזה כי טרם יגיע מרכז גלגל ההקפה תחת השמש כבר הגיע הירח עצמו תחת השמש בשוה כיון שהוא אז בחלק התחתון מגלגל ההקפה ובפאת מזרח ממרכז גלגל ההקפה. וא"כ יהיה מולד האמיתי קודם למולד האמצעי וזהו המכוון במאמר חז"ל פעם בא בארוכה ופעם בא בקצרה והבן זה.

אבל ראוי שתידע שזה האורך והקוצר אינו שוה בכל מולד. המשל בצורה י' נקודת ד הוא מרכז הארץ ונקודת ה הוא מרכז גלגל היוצא מהשמש והשמש עצמו הוא בנקודת א בגלגלו והירח עצמו הוא בנקודת ו ונקודת ז הוא מרכז גלגל ההקפה ונקודת ב הוא מקום אמצע השמש בגלגל המזלות ומרכז גלגל ההקפה הוא תחת מקום אמצע השמש בשוה והוא מולד אמצעי אבל מקום השמש האמיתי הוא בנקודת ג מגלגל המזלות ומקום הירח האמיתי הוא בנקודת ח. מבואר מזה כי בעת המולד האמצעי היה מקום הירח האמיתי רחוק ממקום השמש האמיתי בכדי קשת גבח שהרי קשת גב הוא מנת מסלול השמש¹⁴² וקשת בח הוא מנת מסלול הירח¹⁴³ ומקום הירח עצמו כבר התבאר שהוא לפני השמש בפאת מזרח וא"כ כבר התקבץ הירח עצמו עד השמש קודם שהתקבץ מרכז גלגל ההקפה עם השמש.¹⁴⁴ נמשך מזה שהמולד האמיתי היה קודם המולד האמצעי בכדי שיעור מה שיתנועע הירח בקשת גח ושיעור של מנות האלה הוא בכדי י"ד שעות. ובזה השיעור מהזמן הקדים מולד האמיתי למולד האמצעי. גם ייתכן שהיה מולד האמיתי אחר מולד האמצעי ביכדי י"ד שעות. המשל בצורה שקדמה¹⁴⁵ אם היה השמש בגלגלו בנקודת מ ומקומו האמצעי בגלגל המזלות היה בנקודת ס ומרכז גלגל ההקפה היה בנקודת ט תחת מקום אמצע השמש בשוה והוא מולד האמצעי. והירח עצמו היה בנקודת כ ומקום האמיתי בגלגל המזלות הוא בנקודת ל לפני השמש בפאת מערב ומקום השמש האמיתי היה בנקודת ג. מבואר מזה שהירח היה צריך להתנועע עוד בכדי קשת לסנ עד שהגיע תחת השמש והנה במשל הזה היה המולד האמיתי אחרי מולד האמצעי בכדי שיעור מה שיתנועע הירח בקשת לסנ והוא שיעור זמן י"ד שעות. ולקמן יתבאר לך חשבון מולד האמיתי בדקדוק גדול בדרך שהאצטגננים¹⁴⁶ מחשבים בו, ומשם תוכל להתבונן כי הבדל זמן היותר גדול שבין מולד האמיתי למולד האמצעי הוא י"ד שעות לכל היותר.

¹⁴¹ 25° 49' would be more precise : 13° 3' 53" 55" 48" * 29 – 12 – 793 = 385° 49' = 25° 49'

¹⁴² The distance between the mean sun and the true sun is the equation of the center or the quota of the mean solar anomaly.

¹⁴³ The distance between the mean moon and the true moon is the quota of the moon's anomaly.

¹⁴⁴ The true longitude of the moon is greater than the true longitude of the sun; the true conjunction was already before the men conjunction.

¹⁴⁵ Drawing 10 : צורה י'.

¹⁴⁶ Indeed the calculations of Hanover were performed on a similar way as professional astronomers of his time.

עוד חקרו בעלי תכונה והסתכלו יותר במהלך הירח ומצאו בכלי העיון ש[א]ע"פ שחשבון הקיבוץ והניגוד האמיתי אשר התבאר למעלה מכוון היטב עם העיון בכל עת, מ"מ מקום בזמן מן הזמנים יהיה שם שינוי בין מקום הירח אשר התבאר מן החשבון ובין מקומו הנראה מניצוץ עינינו עד שבעבור זה ישתנה הקשת שבין הירח האמצעי והאמיתי בפחות ויתר. והשינוי הזה¹⁴⁸ הולך וגדל אחרי עת המולד עד רביעית החודש והוא כאשר יהיה מרחק הירח מן השמש צ' מעלות שאז יהיה השינוי שבין הירח האמצעי והאמיתי בתכלית הגדול ומשם והלאה השינוי מתמעט והולך עד שעת הניגוד והוא כאשר יהיה השמש והירח רחוקים זה מזה בתכלית שהוא מרחק ק"פ מעלה, שאז לא יהיה שם שינוי אחר זולת השינוי הראשון אשר התבאר לעיל ס' כ"ג. ומשם והלאה חוזר זה השינוי להשתנות מידי יום ביומו עד ג' רביעית החודש והוא כאשר יהיה מרחק הירח מעל השמש ר"ע מעלה ממערב למזרח ואז יהיה השינוי גדול בתכלית כמו שהיה ברביעי הראשון, ומשם והלאה יתמעט השינוי והולך וחסור¹⁴⁹ עד עת המולד ואז אין שם שינוי לגמרי זולת השינוי הראשון אשר התבאר לעיל ס' כ"ד. גם מצאו בכלי העיון כי בעת המולד ובעת הניגוד יהיה מרחק הירח מן הארץ רחוק מאוד בתכלית מה שאפשר¹⁵⁰ וברביעי הראשון וברביעי השלישי מצאו הירח קרוב אל הארץ מאוד בתכלית מה שאפשר ובשאר נקודות הגלגל מצאו הירח במרחק אמצעי ובפחות ויתר בבחינת יום ויום, בעבור זה הסכימו וגזרו אומר כי מרכז גלגל הירח הוא יוצא ממרכז גלגל המזלות שהוא הארץ (כמו שהוא בגלגל השמש) ומרכז גלגל הזה מסבב סבובו סביבות הארץ ממזרח למערב הפך סדר המזלות לפי שגם נקודת הגובה מגלגל היוצא הזה מתנועע ממזרח למערב הפך סדר המזלות. ומהלכה ביום אחד י"א מעלה י"ב חלקים י"ט שניים ומרכז גלגל ההקפה מתנועע בגלגל זה היוצא מרכז ממערב למזרח בכדי כ"ד מעלות כ"ב חלקים נ"ד שניים בכל יום. ובעת הקיבוץ תמיד יהיה הגובה מגלגל היוצא גם מרכז גלגל ההקפה, שניהם מכוונים תחת השמש בשוה, עד שהקו היוצא מניצוץ עינינו אל מקום אמצע השמש עובר על מרכז גלגל היוצא ועל מרכז גלגל ההקפה ועל נקודת הגובה מגלגל היוצא בשוה, ויתנועע הגובה לפאת מערב ביום אחד י"א מעלה י"ב חלקים י"ט שניים ויתנועע השמש לפאת מזרח ביום אחד בכדי נ"ט חלקים ח שניים וכפי זה יהיה מרחק הגובה מן השמש ביום אחד י"ב מעלה י"א חלקים כ"ז שניים. ומרכז גלגל ההקפה מתנועע בגלגל היוצא גם ממערב למזרח כ"ד מעלה כ"ב חלקים נ"ד שניים. וכאשר תגרע מרחק הגובה עד מקום אמצע השמש ממהלך מרכז גלגל ההקפה ביום אחד נשאר י"ב מעלה י"א חלקים כ"ז שניים. ויהיה מרחק גלגל ההקפה ממקום אמצע השמש בפאת מזרח כמרחק הגובה מאמצע השמש בפאת מערב וככה יהיו במרחק שוה תמיד, בכל עת ובכל שעה, כי תמיד יהיה מרחק הגובה ממרחק גלגל ההקפה לכפל מרחק מרכז גלגל ההקפה מאמצע השמש. וא"כ כאשר יהיה מרחק מרכז גלגל ההקפה צ' מעלות מאמצע השמש לפאת מזרח אזי יהיה מרחק הגובה ממרכז גלגל ההקפה ק"פ מעלות. הנה מבואר מזה שאז יהיה מרכז גלגל ההקפה בשפל רום גלגל היוצא שהוא המקום הקרוב אל הארץ ובעבור זה יהיה הירח קרוב לארץ וזאת היא הסבר בעצמה במה שהשינוי שבין אמצע הירח והאמיתי אשר בגלגל המזלות הוא בתכלית הגדול במקום הזה. והיינו לפי שגלגל ההקפה הוא קרוב לארץ, לכן שני הקווים היוצאים מניצוץ עינינו שהאחד עובר על מרכז גלגל ההקפה ומגיע עד נקודה אחת בגלגל המזלות והשני עובר על מרכז הירח עצמו ומגיע עד מקום אחר בגלגל המזלות ואין ספק כי שני הקווים האלה מתפשטים ומתרחבים יותר כל עוד שיהיה גלגל ההקפה יותר קרוב לנגד עינינו ממה שהם כאשר יהיה גלגל ההקפה רחוק ממנו. ודבר זה מבואר לחוש ואין צריך לבארו. המשל בצורה י"א, עגולת אבגד הוא גלגל

¹⁴⁷ The second lunar model in order to take the evection into consideration. See Pedersen, O. A survey of the Almagest, Odense University Press, p. 184.

¹⁴⁸ The evection. Its effect is maximum when the elongation is 90° and 270°.

¹⁴⁹ Gen 8; 5.

¹⁵⁰ The distance is maximum at the conjunction and opposition when the elongation is 0° and 180°, the distance moon-earth is then $P = R + e_c = 60$; the distance is minimum when the elongation is 90° and 270°, the distance moon-earth is then $P = R - e_c = 39.3667$. The ratio $P_{\min} / P_{\max}$ is = 0.66. More over, in chapter 24 it will be explained that what we call here the moon, is really only the center of the epicycle, and the moon itself is on the epicycle. And in chapter 26 Hanover writes that the radius of the epicycle is 0.10576R. So the ratio of min moon-earth distance to its max, is $0.69 / 1.31 = 0.53$. This in contradiction with all the observations and was a real objection against the model of the ancients.

המזלות ונקודת **א** הוא מקום אמצע השמש¹⁵¹ ונקודה **ה** הוא מרכז גלגל המזלות והוא גם הוא מרכז הארץ ומרכז גלגל היוצא ממרכז גלגל הירח היה בעת ההיא בנקודת **ט**. ונקודות **ו** ו**ז** **וכלל** הוא גלגל היוצא ונקודת **ו** הוא הגובה ושם הוא מרכז גלגל ההקפה בכל עת שיהיה הקיבוץ האמצעי. והירח עצמו היה בגלגל ההקפה בנקודת **ז** וכאשר תמשוך ממרכז הארץ קו **הזח** העובר על מרכז הירח ומגיע עד גלגל המזלות יהיה מקום הירח האמיתי בנקודת **ח** וקשת **אח** הוא קשת השינוי שבין מקומו האמצעי ובין מקומו האמיתי והוא ה' מעלות.¹⁵² והנה השמש והירח ומרכז גלגל ההקפה ומרכז גלגל היוצא, כל אחד יתנועע כפי תנועתו המסודרת בו עד ז' ימים בקירוב ואז כבר התנועע מרכז גלגל היוצא מנקודת **ט** עד נקודת **נ** ועי"ז נעתק הקף כל הגלגל היוצא ממקומו והיא עגולת **סרעק** ואז יהיה הגובה ממנו בנקודת **ס**. ובעת ההיא כבר התנועע מרכז גלגל ההקפה לפאת מזרח עד נקודת **ע** מגלגל היוצא והוא בשפל רום גלגלו שהוא המקום הקרוב לארץ בתכלית. ואז יהיה אמצע הירח בנקודת **ב** מגלגל המזלות, והגובה מגלגל היוצא יהיה אז במקום **ד** מגלגל המזלות. התבאר מזה כי מרחק **בא** שהוא מרחק מקום אמצע השמש ממקום אמצע הירח הוא שוה למרחק **דא** שהוא מרחק מקום הגובה מגלגל היוצא ממקום אמצע השמש, כי כל אחד מהם הוא מרחק צ' מעלה. ונניח שהירח עצמו יהיה בנקודת **פ** מגלגל ההקפה ומקומו האמיתי בגלגל המזלות הוא נקודת **צ** וקשת השינוי שבין מקומו האמצעי ובין מקומו האמיתי הוא קשת **בצ** וזה השינוי הוא יותר גדול מקשת שינוי הראשון שהוא קשת **אח** אשר היה ה' מעלות אבל השינוי הזה הוא ז' מעלות מ"א חלקים ועם היות שבשניהם היה הירח במרחק שוה ממרכז גלגל ההקפה, מ"מ יכול ביניהם השינוי, לפי שבמשל הראשון אשר הם בתחילת החודש אזי היה גלגל ההקפה רחוק מן הארץ בתכלית המרחק ובמשל השני אשר היה בשבעה לחודש היה גלגל ההקפה קרוב אל הארץ בתכלית הקירוב ובעבור זה יהיה השינוי אז יותר גדול בגלגל המזלות לפי ששני הקווים היוצאים מניצוץ עינינו יתפשטו ויתרחבו אז זה מזה יותר כמו שבארנו לעיל. ומעתה בנקל יוכל לצייר בדעתך איך שהשינוי הולך וגדול עד רביע הראשון ומשם והלאה הולך וחסור עד עת הניגוד שהוא בחצי החודש, שאז יהיה מרכז גלגל ההקפה על נקודת **ג** והוא מן השמש ק"פ מעלה, ואז יהיה השינוי רק כאשר היה בתחילת החודש. ומשם והלאה יתחיל מרכז גלגל ההקפה להתקרב אל השמש בפאת מערב והגובה יתחיל להתקרב אל השמש בפאת מזרח. וכאשר הגיע מרכז גלגל ההקפה ברביע השלישי אזי יהיה כנגדו ואז יהיה השינוי שבין מקום האמצעי והאמיתי כמו שהיה שיהיה ברביע הראשון לפי שאז יהיה ג"כ מרכז גלגל ההקפה בשפל רום גלגל היוצא כמו שהיה ברביע הראשון. ומשם והלאה יתקרבו שניהם אל השמש (רצוני לומר הגובה [?]) מרכז גלגל ההקפה) ויגיעו אליו זה בפאת מזרח וזה בפאת מערב, והעת אשר יגיעו שניהם אל השמש הוא עת המולד מן החודש שלאחריו.

כ"ה.¹⁵³

עוד חקרו בעלי תכונה ומצאו ע"י כלי עיון שיש עוד שינוי אחר במהלך הירח כי עם היות שכבר מצאו החשבון מכוון עם העיון בדקדוק גדול בארבעה מקומות שדיברנו שהם בעת המולד וברביע הראשון ובעת הניגוד וברביע השלישי, עכ"ז מצאו שיש עוד שינוי אחר בין הזמנים האלה בבחינת יום בינוני ומצאו כי השינוי אשר הוא בתכלית הגודל בין הזמנים האלה הוא באמצעיים אשר בין הריבועים האלה.¹⁵⁴ אבל בריבועים עצמם לא

¹⁵¹ In א"א it is assumed that the mean sun remains in א. Thus the whole figure remains centered on the mean sun.

¹⁵² For example.

¹⁵³ The third lunar model. See Pedersen, A Survey of the Almagest, 1974, p. 192.

¹⁵⁴ Introduction of the third model in order to account for the situation when the elongation is 90° and 270°. However, Hanover's claim that the maximum value of the quota of the double elongations is at 45° 135° 225° and 315°, is not accurate. According to Hanover's own table of the quota of the double elongation, whose accuracy was verified by us, the maximum value of the quota of the double elongation is reached at the elongations 57° 123° 237° and 303°.

ממצאו השינוי הזה כי הם [מצאו?] בבחינה גדולה שיתחיל זה השינוי מיד אחרי עת המולד (לא בעת המולד עצמה) והולך וגדל עד עת שיהיה מרכז גלגל ההקפה ממקום אמצע השמש מ"ה מעלות ואז יהיה זה השינוי בתכלית גודלו ומשם והלאה פוחת והולך עד רביע הראשון והוא בעת שיהיה מרכז גלגל ההקפה מרחק צ' מעלה ממקום אמצע השמש ואז לא יהיה שם זה השינוי השלישי לגמרי. חוזר זה השינוי ומתגדל והולך עד חצי רביע ושם יהיה השינוי בתכלית גודלו ומשם והלאה חוזר להתמעט עד עת הניגוד ואין שם שינוי לגמרי. ומשם והלאה חוזר להשתנות עד חצי רביע השלישי, ואז יהיה בתכלית הגודל. ואח"כ מתמעט עד סוף רביע השלישי וכן כמנהג ג"כ ברביע הרביעי. וממה שהתבאר הונה בידך כי השינוי השלישי אינו נוהג לא בסוף רביע הראשון ולא בעת הניגוד שהוא סוף רביע השני ולא בסוף רביע השלישי ולא בסוף רביע הרביעי שהוא עת המולד. אבל בכל שאר המקומות אשר בין הרבועים נוהג זה השינוי בפחות ויותר. ותמיד יהיה תכלית גודלו בהיות מרחק מרכז גלגל ההקפה ממקום אמצע השמש מ"ה מעלות או קל"ה מעלות או רכ"ה מעלות או שט"ו מעלות, והוא בהיות מרכז גלגל ההקפה במרחקים האמצעיים שבין הארבעה ריבועים. ובעבור זה הסכימו בעלי תכונה וגזרו אומר שיש לגלגל ההקפה שתי תנועות, האחת הוא תנועת מרכזו באופן גלגל היוצא ממערב למזרח כמו שהתבאר למעלה ס' כ"ג והשנית אינה תנועה סיבובית אבל היא תנועת הנליזה והוא שקוטר גלגל ההקפה הוא נלוז במעגלו, רצוני לומר שהקו היוצא מניצוץ עינינו ועובר על מרכז גלגל ההקפה ועל נקודת רום גובהו, לפעמים הוא נלוז מניצוץ עינינו ונוטה אל נקודה אחרת שהיא נוכח נקודת מרכז גלגל היוצא. המשל הצורה י"ב¹⁵⁵, עגולת והסב הוא גלגל המזלות ונקודת א היא הארץ שהיא מרכז גלגל המזלות ונקודת ז הוא מקום השמש בגלגלו ועגולת גדח הוא גלגל הירח היוצא מרכזו ומרכז גלגל היוצא ב נקודת ג היא נקודת הגובה מגלגל היוצא והוא במעמד יום או יומיים אחרי המולד שהוא קיבוץ האמצעי והתרחק הגובה מן השמש למערב בכדי קשת ה{ז} כי נקודת ה{ז} הוא מקום אמצע השמש בגלגל המזלות ונקודת ה היא מקום הגובה בגלגל המזלות. ומרכז גלגל ההקפה כבר התנועע בתוך הזמן ההוא למזרח בכדי קשת ה{ז} והוא הנקרא בפי הרמב"ם ז"ל **אמצע המסלול**. ומרכז גלגל ההקפה הוא נקודת ח מגלגל היוצא ומה שהתנועע הירח עצמו בגלגל ההקפה הוא הנקרא בפי הרמב"ם ז"ל **מסלול הירח**. והנה כבר הכרחי הוא שתהיה לנו נקודה בגלגל ההקפה שמימנה תהיה התחלת מניין מעלות מסלול הירח ובהחזר בעלי התכונה בנקודת הגובה מגלגל ההקפה שמשם ההתחלה למספר מעלות מסלול הירח, והיא הנקודה העליונה מחצי העליון של גלגל ההקפה. ולפי שמרכז גלגל היוצא משתנה בכל עת, בעבור זה גם הגובה מגלגל הוא משתנה ונלוז מנגד עינינו אל נקודה אחרת זולתה. והנה בעת המולד לא יהיה שם זה השינוי לפי שהקו היוצא מניצוץ עינינו ועובר על מרכז גלגל ההקפה ומגיע אל נקודת הגובה מגלגל ההקפה הוא הקו עצמו היוצא מהנקודה הנוכחית¹⁵⁶ למרכז גלגל היוצא ועובר על מרכז גלגל ההקפה ומגיע אל נקודת הגובה מגלגל ההקפה, על כן לא יהיה שם זה השינוי. ואולם ביום או יומיים אחרי המולד ישתנו אלה שני הקוים זה מזה ויהיה ביניהם שינוי שהרי כאשר תוציא קו אחט והוא ממרכז הארץ ועובר על מרכז גלגל ההקפה, הנה הקו ההוא נופל על נקודת פ מגלגל ההקפה ומגיע עד נקודת ט מגלגל המזלות. אמנם נקודת פ מגלגל ההקפה איננו הגובה האמיתי כיוון שהקו ההוא משתנה מן הקו היוצא מהנקודה הנוכחית [למרכז] גלגל היוצא קו בחל שבקו ההוא יגיע אל נקודה אחרת מגלגל המזלות זולת נקודת ט, וכל זה לפי שקוטר גלגל ההקפה שהוא הקו היוצא מנקודה הנוכחית למרכז גלגל היוצא הוא נלוז מנגד עינינו. ומעתה {בין} תבין אשר לפניך שהנליזה הזאת היא נוטה לפאת מזרח מן הגובה הירח האמצעי מ"מ יהיה השינוי לפאת מערב בערך אלינו כי העיקר מה הוא בבחינת המולד הוא כפי מה שאנחנו רואים בעינינו. על כן יהיה השינוי לפאת מערב מן הגובה האמצעי. על כן יהיה שינוי הנליזה הזאת בנקודה אחרת שהיא נוטה ממרכז גלגל היוצא והוא קו כצ[ח] {ב} והנקודה ל הוא מקום הגובה האמיתי ומשם מתחילים למנות מעלות מסלול הירח. וכבר זה מבואר והוא מה שהחוש יכול לתפשו וזהו מה שרצינו לבאר.

¹⁵⁵ The Δ is very important to understand the definitive lunar model. It must however be emphasised that the line Δ going from the earth to the sun should be the bisecting line of the angle Δ , this is not exactly the case on the figure.

¹⁵⁶ The point diametrically opposite to the center of the deferent; it is called the prosneusis point.

כ"ו.

וכל השינויים האלה אשר הזכרנו עד הנה הם ברורים ונכונים כפי מה שמצאו בעלי התכונה ע"י כלים המיוחדים לכך שהם כלי העיון הקולעים אל השערה ולא יחטיאו¹⁵⁷. ואולם מנות השינויים האלה מיוסדים על חכמת חשבון המשולשים, כי התחכמו חכמי התכונה לסדר החשבון בשלושה השינויים הנזכרים ע"פ מה שמצאו שמרחק מרכז היוצא הוא רחוק ממרכז הארץ 20766 חלקים וחצי קוטר גלגל ההקפה הוא 10576 חלקים, מאותם חלקים שחצי קוטר גלגל היוצא נחלק מהם אל 100.000 חלקים. ועפ"ז נוכל למצוא כל הדברים הפרטיים במנות שלושה השינויים האלה ע"פ חכמת המשולשים, גם נוכל למצא בכל זה מרחק הירח מן הארץ בכל עת ותוכן החשבון יתבאר לפנינו בעז"ה.¹⁵⁸

כ"ז.

הלוא עינינו רואות ולא זר¹⁵⁹ כי בעת מן העיתים תחשך השמש בצהריים, גם הירח והכוכבים לממשלת הלילה, לפעמים אספו נוגהם וילבשו קדרות,¹⁶⁰ והוא מה שנקרא אצל חז"ל בשם ליקוי באומרם ליקוי השמש או ליקוי הירח. ומצאו בעלי התכונה ע"פ הניסיון כי ליקוי השמש יהיה בעת הקיבוץ האמיתי וליקוי הירח יהיה תמיד בעת מילואו שהוא עת הניגוד. ומפני זה הסכימו כי העילה בליקוי השמש והירח היא כפי מה שיתבאר לפנינו כי כבר העירונו בס' כ"ג שהירח הוא גשם עכור ואין לו אור עצמו אבל הוא מקבל אורו מן השמש כמראה מלוטשת המקבלת אור מן השמש ומשלכת ניצוציה במקום הצל שהוא מקום שאין ניצוצי השמש יכולים להגיע שם בעת ההיא. גם התבאר שם שגלגל השמש הוא למעלה מגלגל הירח, לכן כאשר יהיה הקיבוץ האמיתי בראש תלי או בזנב תלי או קרוב להם, שאז אין הירח נוטה מעל גלגל המזלות לגמרי אז השמש והירח מכוונים תחת נקודה אחת מגלגל המזלות והיא נקודת הפגיעה עד שהקו היוצא מניצוץ עינינו ועובר על הירח הוא עובר ג"כ על השמש ומגיע עד נקודת הפגיעה מגלגל המזלות כמו שיתבאר לקמן ס' כ"ה, ע"ש. הנה כפי זה מבואר שהירח יהיה בעת ההיא מסך מבדיל בינינו ובין השמש שלא יוכל להשליך ניצוציו עלינו. הרי לפניך עילה מבוארת וסיבה מוחשית בליקוי השמש. אמנם העילה בליקוי הירח תבין ותדע כי בעת הניגוד שהשמש הוא תחת הארץ והירח למעלה מן הארץ ורחוקים זה מזה ק"פ מעלות והוא בזמן שאחד מהם יהיה בראש תלי והשני בזנב תלי שאז הירח בלתי נוטה מעל גלגל המזלות. וכיוון שהשמש הוא למטה מן הארץ והירח הוא למעלה מן הארץ והארץ היא באמצעותם א"כ היא מפסקת ביניהם עד שניצוצי השמש אינם יכולים להגיע אל הירח. ולפי שאין לירח אור מפאת עצמו והארץ מבדלת בינו ובין השמש עד שלא יתכן שיקבל הירח אורו מן השמש, לכן ישאר הירח בקדרותו וזאת היא סיבת פרטית גם בליקוי הירח. המשל הצורה י"ג, נקודה א היא הארץ והשמש הוא בנקודת ב, והירח הוא בנקודת ג בעת הקיבוץ האמיתי. ולפי שהירח יהיה אז למעלה מן הארץ ולמטה מן השמש, רצוני לומר שהוא במצב האמצעי בינינו ובין השמש. לכן החלק העליון מן הירח הוא המאיר כי הוא מקבל אורו מהשמש והחלק התחתון ממנו ישאר בקדרותו. וכיוון שהירח מפסיק בין השמש ובין האנשים העומדים תחת התנגדות השמש והירח, לכן אין ניצוצי השמש יכולים

¹⁵⁷ Jud 20; 16.

¹⁵⁸ According to Ptolemy the distance between the earth to the apogee of the lunar movement is 60^p , the radius of the circle described by the center of the deferent around the earth is $10^p 19'$ and the radius of the epicycle is $5^p 15'$. The radius of the deferent is $60^p - 10^p 19' = 49^p 41'$. Thus the lunar excentricity is $e_c = 0.207648$ and the ratio radius of the epicycle/ radius of the deferent is 0.105669. Hanover takes a radius of the deferent of 100000 and adopts an lunar excentricity of 0.20766 and a ratio $r/R = 0.10576$ very close to the former values. It is likely that the values of these parameters were taught in his time and were not personal values adopted by him. See Ajdler, J. Hilkhut Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam pp. 55-56.

¹⁵⁹ Job 19; 27.

¹⁶⁰ According to Isaiah 50; 3.

להגיע אליהם כי ניצוציו יפלו על החלק העליון של הירח וקדרות החלק התחתון ממנו משליך צל על האנשים העומדים לנגדו בשוה ואין ניצוצי השמש מגיעים אליהם. וזה עניין ליקוי השמש ואולם כאשר תתנועע הירח למזרח ונעתק מן השמש לפאת מזרח אזי נראה אלינו מאור הירח מעט ואורו מוסיף והולך אלינו מדי יום ביומו עד עת הניגוד, והוא כאשר יהיה הירח בנקודת ד' שהוא מרחק ק"פ מעלות מאמצא השמש, אזי יהיה הירח במילואו לפי שהארץ תהיה אז בין השמש והירח. ובעבור שהירח נוטה מגלגל המזלות עד שהשמש יוכל להשליך עליו ניצוציו בדרך שחצי הירח המאיר הוא לנגד עינינו, לכן נראה הירח במילואו. ואולם אם יהיה שם ניגוד אמיתי והוא כאשר יהיה השמש בראש תלי והירח בזנב תלי או בהפך שאז אין הירח נוטה מעל גלגל המזלות (כמו שיתבאר לקמן ס' כ"ח) לכן יהיה ליקוי ירח אם יהיה הירח למעלה מן האופק והשמש תחת האופק, לפי שמרכז הירח ומרכז הארץ ומרכז השמש שלשתם על קו אחד והארץ היא מפסקת בין השמש והירח עד שלא יגיעו ניצוצי השמש אל הירח. ומעת הניגוד והלאה יתחיל הירח להתקרב אל השמש בפאת מזרח ואור הירח מתמעט והולך עד עת המולד שאז לא יהיה אור הירח על הארץ, לפי שחלק המאיר ממנו פונה למעלה אל מול פני השמש. לכן לא יגיע אורו למטה בעת ההיא. וממה שהתבאר בנקל תוכל להבין העילה מה שלפעמים נראה הירח כמין קשת כזה (ויש לו קרניים וזהו בשלשה וארבעה ימים או בחמישה ימים אחר המולד שאז הרחיק הירח קצת מעל השמש ואז נראה אלינו חלק המאיר ממנו, לא כולו. ולפי שגוף הירח הוא עגול כדורי עד שהחלק המאיר ממנו מצויר בו כמין קשת שיש לו קרניים. ולא יתכן שתהייה הקרניים פונות לצד השמש אבל תמיד הן פונות לרוח שכנגדו כמאמר חז"ל מעולם לא ראתה החמה פגימתה של לבנה.¹⁶¹ והעילה בזה לפי שהשמש משליך תמיד ניצוציו על הירח על פני כולו של הירח בחציו אשר הוא לצד השמש. אבל כאשר נגלה קצת מן החצי המאיר לנגד עינינו אזי נראה פגימה בערך אלינו, זה מבואר. ובזה מבואר ג"כ מה שאנחנו רואין שפגימת הירח פונה תמיד לפאת מזרח מהשמש בתחילת החודש ובסוף החודש היא פונה תמיד לפאת מערב מהשמש, והיינו לפי שבתחילת החודש יהיה הירח בפאת מזרח מהשמש ובסוף החודש הוא בפאת מערב מהשמש. וכבר התבאר שפגימת הירח לא תהיה לעולם לצד השמש אלא לרוח שכנגדו וגם זה מבואר.

כ"ח.

כבר הסתכלו בעלי תכונה בכלי המבטה והעיון והיו מעיינים היטב בירח פעם אחר {פעם} ומצאו שאפ"י בחודש אחד¹⁶²..... בעבור שפעם היה נוטה לצפון השמש ופעם היה נוטה לדרום, ובעבור זה הסכימו לומר כי גלגל הירח היוצא ממרכז הארץ, חציו לצפון וחציו לדרום ושגלגל הנוטה חותך את גלגל המזלות בשתי נקודות הפגיעה הרחוקות זו מזו ק"פ מעלות כעין גלגל המזלות וגלגל משוה היום החותכים זה את זה. ודבר זה התבאר להם גם כן במופת חותך והוא שאם נניח שגלגל הירח היוצא ממרכז הארץ יתנועע על שטח גלגל המזלות בשוה יתחייב מזה שבכל חודש וחודש יהיו שני ליקוים, האחד בתחילת החודש והוא לשמש והשני באמצע החודש והוא לירח שהרי בתחילת היו פוגעים זה בזה בגלגל המזלות עצמו ויהיה אז ליקוי השמש, גם בעמצע היו מתנגדים זה לעומת זה בגלגל המזלות ויהיה שם ליקוי הלבנה בהכרח כמו שהתבאר לעיל ס' כ"ז. ואנחנו רואים שאינו כן כי הנה יחוייב מזה חיוב הכרחי שבגלגל הירח היוצא ממרכז הארץ הוא נוטה מעל גלגל המזלות חציו לצפון וחציו לדרום, ובזה נבין מה שלא יהיה לפעמים שום ליקוי ביושן מן החודשים לא לשמש ולא לירח. והוא לפי שהירח נוטה מעל גלגל המזלות שהשמש יתנועע בשטחו עד שהקו היוצא מניצוץ עינינו ועובר על הירח עד גלגל המזלות איננו פוגע במקום השמש. על כן לא יהיה שם ליקוי השמש, גם לזאת הסיבה בעצמו לא יהיה שם ליקוי הירח באמצע החודש לפי שבירח נוטה מעל גלגל המזלות שהשמש הולך בשטחו עד שאין הארץ מספקת ביניהם לפי שאין שלושתם מכוונים על קו אחד. ואולם מה שנמצא ליקוי השמש והירח לעיתים, אין זה אלא כאשר יהיו שניהם באחת הנקודות הפגיעה והוא בהיות שגלגל השמש והירח חותכים זה את זה שאז יהיו שניהם מכוונים תחת גלגל המזלות בשוה כמו שהתבאר לעיל ס' כ"ז. ומעתה אבאר תבנית גלגל הירח היוצא ממרכז הארץ, החותך את גלגל המזלות, שחציו נוטה לצפון וחציו

¹⁶¹ B. Rosh ha-Shanah 23b.

¹⁶² The copist skipped probably a line. See Tekunat ha-Shamayim chapter 74 about the same subject.

נוטה לדרומו עד כי שתי נקודות הפגיעה שבהן חותכין זה את זה קראו התוכנים בשם ראש תלי וזנב תלי כי הנקודה שממנה יתחיל הירח לנטות לצד צפון מגלגל המזלות קראו בשם ראש תלי והנקודה השנית שממנה יתחיל הירח לנטות לצד דרום מגלגל המזלות קראו בשם זנב תלי. וכאשר יהיה הירח במרחק אמצעי בין שתי הנקודות האלה והוא מרחק צ' מעלות מכל אחת מהם, אזי הוא נוטה מעל גלגל המזלות בתכלית מרחקו לצפון או לדרום בכדי ה' מעלה וכאשר יהיה הירח בנקודת הראש או הזנב אזי הוא בלתי נוטה ממנו לגמרי לפי שאז הוא עומד בשטח גלגל המזלות עצמו. ובשאר הנקודות מגלגלו יהיה לו נטייה בפחות ויתר כי כאשר יתחיל הירח להתנועע מנקודת הראש, מיד הוא נוטה מעל גלגל המזלות לפאת צפון ומרחק נטייתו הולכת ומוספת עד צ' מעלה שאז תהיה הנטייה בתכלית המרחק, ומשם והלאה מרחק נטייתו מתמעטת והולכת עד הגיעו אל נקודת הזנב שאז אין לו נטייה לגמרי, ומשם והלאה הוא נוטה לדרום המזלות ונטייתו מתרחבת והולכת עד צ' מעלות ואז תהיה בתכלית המרחק ומשם והלאה הולכת ומתמעטת עד בואו אל נקודת הראש שהוא המקום אשר יצא משם. והנטייה הזאת נקראת אצל התוכנים רוחב הירח לפי שהירח נוטה מעל גלגל המזלות לפאת רוחב המדינה לצפון או לדרום. המשל בצורה י"ד עגולת **הבלא** היא עגולת גלגל המזלות ובו מהלך השמש ועגולת **טא[כנב]** היא עגולת גלגל הנוטה ובו מהלך הירח. ונקודת ג היא נקודה מנקודות יושבי הארץ ונקודת ראש תלי היא בנקודת א וכאשר יהיה הירח בנקודה ההיא מתחיל לנטות לפאת צפון מגלגל המזלות. וזנב תלי הוא בנקודת ב וכאשר הירח בנקודה ההיא מתחיל לנטות לפאת דרום מגלגל המזלות וכאשר יהיה השמש בנקודת ד מגלגל המזלות והוא קרוב לראש תלי והירח יהיה אז בנקודת ה מגלגל הנוטה ויהיו שניהם במרחק שווה מנקודת ראש תלי בבחינת הקו היוצא מקוטב גלגל המזלות ועובר על מרכז השמש ועל מרכז הירח, אזי יהיה שם ליקוי השמש אם יהיה הקיבוץ האמיתי במקום ההוא לפי שיושבי הארץ אשר בנקודת ג לא יקבלו אז ניצוצי אור השמש בעבור שהירח הוא מסך מבדיל ביניהם ובין השמש שהרי קו **גהד** היוצא מנקודת יושבי הארץ ועובר על מרכז הירח הוא מגיע אל מרכז השמש והבן זה.

וכן הדין בהיות השמש והירח קרובים לזנב תלי ובמעמד ההוא וזה מבואר ואין צריך לומר שיהיה שם ליקוי השמש כאשר יהיו שניהם (רצוני לומר השמש והירח) בנקודת התלי שאז יהיה ליקוי בכל מדינה ממדינות העולם בלי ספק ששניהם עומדים בנקודה אחת מגלגל המזלות עצמה אשר לא תשתנה בכל המדינות כמשפט טבע נקודה אחת שלא יפול בה השינוי והחילוף וזה מבואר. אבל אם הם רחוקים מנקודת התלי והוא בהיות השמש בנקודת ו מגלגל המזלות ויהיה הירח בגלגל נוטה בנקודת ז אזי לא יהיה [ליקוי] השמש בשום מדינה ממדינות העולם לפי שהירח נוטה אז מעל גלגל המזלות שהשמש הולך בו (רוצה לומר בשטחו) עד שאין הירח מעכב מלהגיע ניצוצי השמש על הארץ בכל מדינה ממדינות העולם אע"פ שיש שם הקיבוץ האמיתי. וכל זה לפי שהקו היוצא מעיני יושבי הארץ ומגיע עד מרכז השמש אינו פוגע בהירח לפי שהוא נוטה מן הקו ההוא, והוא הדין בעת הניגוד בהיות הירח קרוב לראש תלי והוא נקודת (ס) [ה] שאז יהיה השמש קרוב לזנב תלי והוא נקודת (ב) [ס] או בהפך רצוני לומר שיהיה הירח בנקודת ג והשמש בנקודת ס, אזי יהיה ליקוי הירח במדינה ממדינות העולם וכאשר יהיה אחד מהם בראש תלי והשני בזנב תלי אזי יהיה ליקוי הירח בכל מדינות העולם בלא ספק לפי שאז שהארץ מבדלת בין השמש והירח ומשלכת צל על הירח עד שהשמש לא יכול להשליך ניצוציו עליו בעבור שהקו היוצא ממרכז הירח ומגיע אל מרכז השמש הוא פוגע במרכז הארץ המפסקת ביניהם. ואולם בהיותם רחוקים מנקודת התלי, לא יהיה ליקוי הירח בשום מדינה ממדינות העולם בעבור נטיית הירח מעל גלגל המזלות לצפון או לדרומו וזהו מה שרצוננו לבאר. וסדר הליקוים וחשבונם יתבאר בעזה"י בספר אשר יעדתי לחברו.¹⁶³

כ"ט.

וכאשר חקרו בעלי התכונה במהלך הירח והסתכלו בו בכלי הבטה ועיון פעם אחר פעם ומצאוהו במזל אחד מן המזלות נוטה לצפון מגלגל המזלות ואחרי הימים או אחרי השנים מצאוהו במזל ההוא בעצמו נוטה לדרום מגלגל המזלות ולא עוד שאפי' בחודש אחד בעצמו לפעמים שהירח בתחילת החודש נוטה לצפון במזל מן

¹⁶³ Apparently the same book as that alluded in the introduction to the second part of Luhot ha-Ibbur. However, in the first part of this book he gives a method of calculation of the eclipses.

המזלות ובאמצע או בסוף החודש נוטה לדרומו במזל שהוא בעצמו. גם התבאר להם בנסיון בעיתים רחוקים שמצאו ליקוי השמש גם ליקוי הירח בכל מזל מן המזלות. גם מצאו נקודת הראש או הזנב בכל מזל מן המזלות. הנה מכל אחד מן הדרכים האלה אשר הזכרנו התבאר להם במופת שנקודת הפגיעה (שהיא ראש תלי או זנב תלי) הוא מתנועת והולכת ממקום למקום עד שבעבור זה יתכן להיות ליקוי מן הליקויים בכל מזל מן המזלות שיהיה וגם זה ברור.

ל'.

גם התבאר להם לבעלי תכונה כי המקום האורך לכל כוכב מן הכוכבים הוא כאשר תמשוך קו מקוטב גלגל המזלות ועובר על מרכז הכוכב שהוא עצמו ומגיע עד גלגל המזלות בדרך זוית ניצבת. הנה בנקודה ההיא מגלגל המזלות אשר יפול שם הקו שהוא שם מקום האמיתי לכוכב שהוא עצמו ובין מקומו האמיתי בגלגל המזלות [והכוכב עצמו] הוא מרחק הכוכב מגלגל המזלות [הנקרא רוחב הכוכב]. המשל בצורה י"ד יהיה הירח בגלגל הנוטה בנקודת ז כאשר תמשוך עגולה מנקודה מ שהוא קוטב גלגל המזלות העובר על נקודות וז נאמר שמקום הירח האמיתי שהוא בנקודת ז בגלגל הנוטה, הוא בנקודת ו מגלגל המזלות וקשת וז הוא רוחב הירח דרומי.

ל"א.

ומעתה הנני מבאר לך סדר החשבון באיזה דרך תוכל להגיע אל המקומות האמיתיים מן השמש והירח בכל עת שתראה. **וקודם כל דבר** ראוי שיהיה לפניך יסוד אחד אשר תוכל לסמוך עליו בחשבונך, והוא באיזה המעמד והמצב הוא מקום אמצע השמש בעת מן העיתים קרוב לזמנך שמשם תתחיל לחשוב חשבונך לכל עת שתראה למען יקל עליך החשבון שלא תצטרך להטריח כ"כ בחשבונך לחשב בכל פעם מתחילת בריאת העולם. וזהו מה שקרא הרמב"ם ז"ל בשם עיקור.¹⁶⁴ והעיקור או ההתחלה אשר סמכתי עליו כל חשבונותי הוא יום השישי עשרים ותשעה לחודש אלול משנת חמשת אלפים תפ"ה לבריאת העולם והוא ערב ראש השנה משנת תפ"ו.¹⁶⁵ והוא עת שקיעת השמש¹⁶⁶ בירושלים תוב"ב, שהיא אמצע ארץ ישראל ברוחב ל"ב מעלות. והיה אז אמצע השמש בעת ההיא קס"ו מעלה ל"ו חלקים מ"ח שניים מראש מזל [טלה] ומקום גובה השמש היה בעת היא צ"ז מעלה ל"ה חלקים מ"ד שניים ומקום אמצע הירח היה ק"ע מעלה מ"ח חלקים ל"ו שניים ואמצע המסלול היה רס"ט מעלה כ"ח חלקים נ"ד שניים ומקום ראש תלי היה שלוש מעלות כ"ו חלקים. אלה הם העיקרים אשר סמכנו עליהם. **שנית** ראוי שתדע כי מהלך המאורות והגלגלים לדעת הרמב"ם ז"ל הוא זה, מהלך השמש ביום אחד נ"ט חלקים ח' שניים י"ט שלישיים מ"ח רביעיים, מהלך הגובה ביום אחד ט' שלישיים, מהלך

¹⁶⁴ The epoch.

¹⁶⁵ The date of his epoch is thus in Tishri 1725. In Sefer Tekhunot ha-Shama'im he adopted his epoch in Nissan 1730 and in Luhot ha-Ibbur he began his calculation at the moment of the creation. The date of the epoch could give us some information about the date of composition. The epoch was Friday, September 7, 1725. The epoch was likely on Thursday 6 September 1725 at sunset. From the following passage beginning by שישי chap. 31 p. 41 it appears without any doubt that the epoch was at 6 p.m. mean time. In chapter 38 p. 49 it seems that the epoch coincides with the true sunset. In Tekhunat ha-Shamayim (1734) chapter 89 he writes that the visibility calculations are performed 20m after sunset. In Luhot ha-Ibbur II (1756), p. 20, 22, 29 and 30 he seems to calculate at 20m after sunset. In p. 20 of this book he writes that the epoch was 5 – 0 – 360, thus at 6h 20m p.m. mean time. It is likely that he was hesitant about the subject. But this last data seems to be his definitive position.

¹⁶⁶ It is likely that Hanover means the mean sunset at 18h mean time. We are indeed near to the equinox. Similarly Hanover considered the epoch of Maimonides at 18h mean time.

אמצע הירח ביום אחד ¹⁶⁷ י"ג מעלה י' חלקים ל"ה שניים ושלישי אחד מ"ח רביעיים. ¹⁶⁸ שלישית כאשר תהיינה הידיעות האלה מוכנים לפניך בנקל תוכל למצוא מהלך האמצעיים האלה לשני המאורות הנזכרים בכל עת שתמצא. המשל אם תרצה לדעת מהלך אמצע השמש במאה יום אחר יום העיקר בעת שקיעת השמש תוציא מהלך השמש למאה יום והיא צ"ח מעלות ל"ג חלקים י"ג שניים (ואל תחוש (ה) [ל] חלקים כמו השלישיים והרביעיים כי לא יזיקו בחשבון בזמן מן הזמנים בשנים מועטות שאחרי העיקר שסמכנו עליו) תוסיפו על העיקר אשר סמכנו עליו שהוא קס"ו מעלה ל"ו חלקים מ"ח שניים, יצא לך רס"ה מעלות י' חלקים מ"א שניים וזה מקומו האמצעי לאחר מאה יום. וכן תעשה בשאר המהלכים האמצעיים. ¹⁶⁹ רביעית. אחרי אשר הוצאת מקום אמצע השמש תוציא ג"כ מקום גובה השמש והוא במשלינו צ"ז מעלות ל"ה חלקים נ"ט שניים, תגרע מקום הגובה ממקום אמצע השמש נשאר קס"ו מעלות ל"ד חלקים מ"ב שניים וזהו הנקרא מסלול השמש והוא מרחק השמש [האמצעי] עצמו ממקום גובה השמש. תוציא מנת מסלול השמש ותאמר כך, כערך 2069 אל 1931 כך ערך נוגע חצי המסלול אל נוגע קשת ההבדל ¹⁷⁰ והוא בזה המשל פ"ג מעלה כ' חלקים נ"ז שניים וחצי המסלול הוא פ"ג מעלות מ"ז חלקים כ"א שניים. תגרע זה מזה, נשאר כ"ו חלקים כ"ד שניים וזהו מנת המסלול ולפי שמסלול השמש הוא פחות מ-ק"פ מעלות תגרע המנה ממקום אמצע השמש נשאר רס"ד מעלות מ"ד חלקים י"ז שניים והוא מקום השמש האמיתי לעת ההיא. ¹⁷¹ חמישית. לפי שמקום השמש האמיתי הוא בסוף מזל קשת, יתכן שיהיה זה אחר שקיעת החמה האמיתי ע"כ צריך להוציא עוד המגראב ממקום השקיעה בדרך זה, ¹⁷¹ תוציא נטיית השמש ותעריך עליה ותאמר כך, כערך כל הבקע אל בקע מרחק השמש מנקודת הפגיעה הקרוב והוא ראש מאזניים שהוא פ"ד מעלה מ"ד חלקים י"ז שניים כך ערך בקע הנטייה הגדולה שהיא כ"ג מעלה וחצי אל בקע הנטייה שהוא במשלינו כ"ג מעלה כ"ד חלקים. ולפי שמקום השמש במזלות הדרומיים והנטייה גם היא דרומית, תוציא עוד העלייה הישרה ממקום השמש האמיתי, ¹⁷² והוא עליית מעלות המשוה העולות באופק הישר אם השמש. ותעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אך נוגע מרחק השמש מנקודת הפגיעה הקרובה כך ערך בקע ס"ו מעלה וחצי שהוא תשלום הנטייה הגדולה אל נוגע קשת א והוא פ"ד מעלה ט"ז חלקים. ולפי שמקום השמש הוא ממאזנים ועד גדי, תחבר לזה ק"פ מעלה, יוצא רס"ד מעלה ט"ז חלקים והוא עליית מעלות המשוה עם השמש באופק הישר. תוציא עוד הבדל העלייה ¹⁷³ שבין אופק הישר ובין אופק אמצע א"י ותעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל נוגע רוחב והוא ל"ב מעלה, כך ערך נוגע נטיית השמש אל בקע הבדל העלייה המבוקשת והוא ט"ו מעלה מ"א חלקים. ולפי שמקום השמש הוא במזלות הדרומיים, תגרע הבדל הזה מן העלייה הישרה. נשאר רמ"ח מעלה ל"ה חלקים והוא המגראב ¹⁷⁴ בשקיעת השמש באופק א"י. תגרע המגראב מאמצע השמש, נשאר ט"ז מעלה ל"ו חלקים בקירוב. ¹⁷⁵ ולפי שהמגראב הוא פחות מאמצע

¹⁶⁷ The movement of the anomaly is given in chap 23. The movement of the ascending node of the moon is given in Tekhumat ha-Shamayim as 0°3'10"37"48" instead of 0°; 3' 11" given by Maimonides.

¹⁶⁸ Hanover deduced the mean movements from Maimonides' values for 10000 days. He assumed that the values for 10000 days were considered with a greater precision than the smaller spans of time. Banett made later the same assumption. However Neugebauer proved that this assumption is uncorrect. See Ajdlar, J. Hilkhut Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam, Jerusalem 1996, pp. 228-233.

¹⁶⁹ We find the mean coordinates 100 days after the epoch: $l_0 = 265^\circ 10' 41''$, apogee: $97^\circ 35' 59''$, solar anomaly: $\alpha = 167^\circ 34' 42''$. Hanover calculated then the quota of the anomaly and he found $\beta = 26^\circ 24''$ instead of $26^\circ 31''$ by an accurate calculation. Hanover introduced here, without any explanation, the numbers 2069 and 1931. The exact calculation is based on the ratio $(100000 + 3465 \frac{3}{11}) / (100000 - 3465 \frac{3}{11}) = 1.071793$. Hanover replaces this fraction by $2069 / 1931 = 1.071466$, probably for simplifying the calculation without losing significantly the precision. $L = 1 - \beta = 264^\circ 44' 17''$.

¹⁷⁰ $(\alpha/2) - \beta$. See note at the end of chap 16.

¹⁷¹ Maghrab = $\alpha + \Delta$. $\sin \Delta = \tan \varphi * \tan \delta$ and $\sin \delta = \sin \epsilon * \sin L$. He finds $\delta = -23^\circ 24'$.

¹⁷² $\tan \alpha = \cos \epsilon * \tan L$. Hanover gives $\alpha = 264^\circ 16'$.

¹⁷³ $\sin \Delta = \tan \varphi * \tan \delta$. $\Phi = 32^\circ$ and $\delta = -23^\circ 24'$. $\Delta = -15^\circ 41' = -1h 02m 44s$. Thus sunset is at 4h 57m 16s true time.

¹⁷⁴ Maghrab = $\alpha + \Delta = 264^\circ 16' - 15^\circ 41' = 248^\circ 35'' < \alpha$ sunset is before 6 p.m.

Furthermore $\alpha + \Delta - l = -16^\circ 35' 41'' = 66m 22s$. Sunset is at 6 p.m. - 66m 22s = 4h 53m 38s mean time.

¹⁷⁵ $16^\circ 36''$ = Absolute value of $[E + \Delta]$ where $E = \alpha - l = Tm - T = 264^\circ 16' - 265^\circ 10' 41'' = -54^\circ 41'' = -3m 38s$. $Tm = T - 3m 38s$. Sunset is at 4h 57m 16s - 3m 38s = 4h 53m 38s p.m. mean time.

השמש לכן צריך לגרוע מזמן האמצעי כדי שיגיע לזמן האמיתי ¹⁷⁶. ותאמר כך, אם ט"ו מעלה ב' חלקים ט"ו שניים יהיו שעה אחת ¹⁷⁷, כמה יהיו ט"ז מעלה ל"ו חלקים, ותמצא שיעלו לשעה אחת ו' חלקים מששים בשעה וזה הזמן צריך לגרוע מאמצע הזמן ¹⁷⁸. ולפי זה ¹⁷⁹ מקום אמצע השמש בעת השקיעה האמיתית שהשמש שוקע בא"י (אחר גירעון מהלך השמש בזמן זה) רס"ה מעלה ז' חלקים נ"ח שניים והמקום האמיתי ¹⁸⁰ רס"ד מעלה מ"א חלקים ל"ד שניים והוא כ"ד מעלה מ"א חלקים ל"ד שניים במזל קשת. **ששית** הנה בדרך הזה תוציא אמצע הירח ואמצע המסלול ואמצע ראש תלי למאה יום ותחברם על העיקר אשר הודעתך למעלה, רצוני לומר שתוסיפם על העיקר, חוץ ממהלך הראש אשר תגרעהו מן העיקר לפי שמהלכו הוא הפך סדר המזלות ויצא לך מקום אמצע הירח מ"ח מעלה כ"ו חלקים נ"ט שניים ואמצע המסלול קל"ה מעלה נ"ח חלקים מ"ז שניים ומקום ראש תלי (כ"ד) [כ"ה] מעלה ח' חלקים י"ז שניים. ולפי ששקיעת השמש האמיתי היתה קודם השקיעה האמצעית צריך לגרוע שיעור מה שהלך בכדי שעה אחת ו' חלקים ¹⁸¹ ותהיה בידך עת השקיעה האמיתית. ויהיה אמצע הירח מ"ז מעלה חמישים חלקים מ"ה שניים ואמצע המסלול קל"ה מעלה כ"ב חלקים נ"ד שניים ומקום ראש תלי {כ"ד} [כ"ה] מעלה ¹⁸² **שביעית**, אם תרצה לדעת מקום הירח האמיתי תגרע מקום אמצע השמש מאמצע הירח, נשאר קמ"ב מעלה מ"ב חלקים מ"ז שניים והוא מרחק מקום אמצע הירח מאמצע השמש. תכפול זה המרחק ויהיה בידך רפ"ה מעלה כ"ה חלקים ל"ד שניים והוא נקרא אצל הרמב"ם ז"ל מרחק הכפול והוא מרחק מקום אמצע הירח ומקום הגובה מגלגל היוצא. ¹⁸³ תוציא מנת מרחק הכפול ¹⁸⁴ בדרך זה, תעריך ותאמר כך, כערך 100000 והוא חצי קוטר גלגל החוצא אל 20766 והוא מרחק מרכז גלגל היוצא מן הארץ, כך ערך בקע התשלום אל ש"ס מעלות ממרחק הכפול אל בקע קשת א' והוא במשלינו י"א מעלה ל"ד חלקים, תחבר קשת א' אל תשלום מרחק הכפול יצא פ"ו מעלה ח' חלקים והוא קשת ב'. תעריך עוד ותאמר כך, כערך בקע תשלום מרחק הכפול אל בקע ב' כך ערך חצי קוטר גלגל היוצא 100000 אל מרחק מרכז גלגל ההקפה ממרכז הארץ ¹⁸⁵ 103504, תחבר מרחק גלגל היוצא ממרכז הארץ שהוא 20766 אל מרחק גלגל

¹⁷⁶ $E = T_m - T$. Therefore $T = T_m - E$. but here $E < 0$ and therefore $T = T_m + 3m\ 38s$. Therefore the text seems incorrect and should be: ולפי שהמגראב הוא פחות מאמצע השמש לכן צריך לגרוע מזמן האמיתי כדי שיגיע לזמן האמצעי.

¹⁷⁷ The exact figure is $15^\circ 2' 28''$. Indeed $(366.2422 / 365.2422) * 15^\circ = 15^\circ 02' 27.85''$. See chap 22.

However Hanover seems to make the same mistake as in note 126: indeed E is expressed in solar time and there is no reason to multiply by 1.002738 as if we were passing from mean solar time to sidereal time.

¹⁷⁸ The true sunset was thus at 4h 54m p.m. mean time.

¹⁷⁹ The movement of the sun in 66m was subtracted from $265^\circ; 10' 41''$. The end of the span of time of 100 days ends thus at 6h p.m. mean time. The sunset at the time of the epoch considered by the author is thus 6h p.m. mean time. However in chap. 40 and 42 the author mentions that the moment of vision is 6h 15m mean time.

¹⁸⁰ Hanover used the quota of the anomaly calculated before and considered it as a good approximation.

¹⁸¹ Here Hanover calls mean sunset the moment 6 p.m. mean time; it is the mean sunset at the equator.

The true sunset was at 4h 53m 38s p.m. mean time, thus 66m 22s before mean sunset.

¹⁸² At the time of sunset, at 4h 54m we have the following data :

Sun. $l = 265^\circ 7' 58''$. $L = 264^\circ 41' 34''$.

Moon: $l = 47^\circ 50' 45''$. Anomaly = $135^\circ 22' 54''$. According to Hanover, and to our calculation it should be $135^\circ 20' 44''$. Ascendant node = $25^\circ 8' 26''$ according to our calculation, and in the text there is a scribe error, but it is corrected in the 9th step, see there. The value of 25° is thus a rough approximation.

¹⁸³ Elongation $\eta = l - l_0 = 47^\circ 50' 45'' - 265^\circ 7' 58'' = -217^\circ 17' 13'' = 142^\circ 42' 47''$.

Double elongation $2\eta = 285^\circ 25' 34''$

¹⁸⁴ The quota of the double elongation is the angle להפך or **כחא**. In order to find it we must solve the triangle באה. But for that purpose we need the side אה. This necessitates the resolution of the triangle באה. In this triangle we know $\text{בא} = 20766$, $\text{בה} = 100000$ and angle $\text{באה} = 2\eta$ on figure 12. But since $2\eta > 180$, we must resolve the triangle where the angle באה is the complement $360^\circ - 2\eta$. We know two sides and the angle opposite to one of them ; by application of the sine-theorem : $\sin \text{אהב} = \sin (360^\circ - 285^\circ 25' 34'') * 20766/100000 = 11.5474 = 11^\circ 32' 51''$. Hanover writes $\alpha = 11^\circ 34'$. We deduce the angle אבה, it is $180^\circ - 11^\circ 32' 51'' - 74^\circ 34' 26'' = 93^\circ 52' 43''$. We find then the side אה. From the theorem of the sin $\text{אה} = (\sin 93^\circ 52' 43'' / \sin 74^\circ 34' 26'') * 100000 = 103499.6$, to compare with 103504 of Hanover.

¹⁸⁵ See preceding note.

ההקפה ממרכז הארץ שהוא 103504, יוצא 124270. גם תגרע זה מזה 82738 וכן תחלק מרחק הכפול לשניים בדרך שיבא מרחק פשוט שהוא ל"ז מעלות (ט') [י"ז] חלקים ותעריך ותאמר כך, כערך החיבור אל הנשאר כך ערך נוגע חצי מרחק הכפול אל נוגע קשת כ"ו מעלם נ"ב חלקים. תגרעו מן חצי מרחק הכפול, נשאר י' מעלות כ"ה חלקים וזהו מנת מרחק הכפול.¹⁸⁶ **שמינית**, לפי שמרחק הכפול הוא יותר מ-ק"פ מעלה תגרע מנתו מאמצע המסלול, נשאר קכ"ד מעלה נ"ד חלקים והוא מה שקרא הרמב"ם ז"ל בשם מסלול הנכון.¹⁸⁷ תוציא מנת המסלול הנכון ותחבר חצי קוטר גלגל ההקפה שהוא 10576 אל מרחק מרכז גלגל ההקפה ממרכז הארץ שהוא 103504, יוצא 114080. תגרע זה מזה נשאר 92928, ותעריך ותאמר כך, כערך החיבור אל הנשאר כך ערך נוגע חצי המסלול הנכון אל נוגע קשת נ"ז מעלה כ"ב חלקים. תגרעו מן חצי המסלול הנכון ויוצא ה' מעלות ב' חלקים והוא מנת המסלול הנכון.¹⁸⁸ ולפי שהמסלול הנכון הוא פחות מ-ק"פ מעלה תגרע מנתו מאמצע הירח, נשאר מ"ב מעלה מ"ח חלקים מ"ה שניים והוא מקום הירח האמיתי לעת שקיעת השמש האמיתי.¹⁸⁹

תשיעית, צריך שתוצא עוד רוחב הירח בדרך זה, תגרע מקום הראש ממקום הירח האמיתי ובמשלנו זה, נשאר י"ז מעלה מ' חלקים י"ט שניים.¹⁹⁰ ותעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל בקע מרחק הירח מנקודת הראש כך ערך בקע ה' מעלות והוא תכלית רוחב הירח אל בקע רוחב הירח המבוקש והוא מעלה אחת ל"א חלקים.¹⁹¹ ולפי שמרחק הירח ממקום הראש הוא פחות מ-ק"פ על כן יהיה רוחבו רוחב צפוני כי כאשר הירח הולך מנקודת הראש אל הזנב יהיה בנטייה הצפונית ובהיותו הולך מן הזנב אל הראש הוא בנטייה הדרומית. הרי לפניך איך תוכל למצא מקום השמש האמיתי ומקום הירח האמיתי בכל עת שתראה. ולהשכילך בינה אמשול **משל אחר**, נניח תשעים יום אחר העיקר היה מהלך אמצע השמש פ"ח מעלה מ"ב חלקים שלושים שניים, נסיפהו על העיקר יהיה אמצע השמש רנ"ה מעלה י"ט חלקים י"ט (ט) [ח] שניים ומהלך הגובה בתשעים יום הוא י"ד שניים, נסיפהו על מקום הגובה בעת העיקר יוצא צ"ז מעלה ל"ה חלקים נ"ח שניים, תגרע מקום הגובה מאמצע השמש נשאר ק(צ) [נ] "ז מעלה מ"ג חלקים כ' שניים, מסלול השמש.¹⁹² תוציא מנת המסלול והוא מ"ו חלקים כ"ו שניים,¹⁹³ ולפי שהמסלול הזה פחות מ-ק"פ, תגרע מנתו מאמצע השמש ונשאר רנ"ד מעלה ל"ב חלקים נ"ב שניים והוא מקום השמש האמיתי לעת אמצע השקיעה.¹⁹⁴ תיקח (המטאלע) [המגראב]

¹⁸⁶ We must now solve the triangle **אכח**.

¹⁸⁷ The mean anomaly, angle **להמ** was $135^{\circ} 22' 54''$, the quota of the double elongation, the angle **פחל** is $10^{\circ} 24' 15''$, while Hanover writes $10^{\circ} 25'$. Therefore the true anomaly is $124^{\circ} 58' 39''$, while Hanover writes $124^{\circ} 54'$ instead of $124^{\circ} 59'$. The best way to realize that we must subtract the quota when the double elongation is $> 180^{\circ}$ is to draw the figure.

¹⁸⁸ We must solve the triangle **אהמ**. We know the side **אח** = 103499.6 and the side **המ** = 10576 and the angle **אהמ** = $180^{\circ} - 124^{\circ} 58' 39''$ (the true anomaly) = $55^{\circ} 01' 21''$. Thus angles **האמ** + **חאמ** = $124^{\circ} 58' 39''$. The theorem of the tangent gives $\tan(\frac{\text{האמ} - \text{חאמ}}{2}) = \tan \frac{[(62^{\circ} 29' 19.5'' - \text{האמ})/2]}{2} = \tan 62^{\circ} 29' 19.5'' * [(103499.6 - 10576) / (103499.6 + 10576)] = \tan 57^{\circ} 24' 23''$ to compare with $57^{\circ} 22'$ for Hanover. The quota of the true anomaly is then $\beta = 62^{\circ} 29' 19.5'' - 57^{\circ} 24' 23'' = 5^{\circ} 04' 56''$.

¹⁸⁹ The true longitude of the moon at the time of sunset is then $47^{\circ} 50' 45'' - \beta = 42^{\circ} 45' 49''$ instead of $42^{\circ} 48' 45''$ that Hanover found.

¹⁹⁰ $L_{\zeta} - L_{\text{node}} = 42^{\circ} 48' 45'' - 25^{\circ} 8' 26'' = 17^{\circ} 40' 19''$. From here we see that Hanover had the correct number for the ascendent node, and in the 6th step there was a scribe error.

¹⁹¹ $\sin \beta_{\zeta} = \sin(\text{argument of latitude}) * \sin 5^{\circ}$. Generally we consider that the argument of latitude is an arc of the ecliptic and the formula is then $\tan \beta_{\zeta} = \sin(\text{argument of latitude}) * \tan 5^{\circ}$. However, the use of the first formula proves that Hanover considered that the whole theory of the moon's movement happens in the plane of the moon's movement. The argument of latitude is thus an arc of this plane and not of the ecliptic. When Hanover calculated right here the distance of the moon from the ascendant mode, by subtracting their distances from the vernal equinox (see previous note) he obviously considered this distance to be on the ecliptic and neglected the slight difference between both planes.

¹⁹² Thus 90 days after the epoch, at 6 p.m. mean time: $l_0 = 255^{\circ} 19' 18''$, $l_{\text{apogee}} = 97^{\circ} 35' 58''$ and the mean anomaly is $\alpha = 157^{\circ} 43' 20''$.

¹⁹³ With the formula $\tan \beta = e_0 \sin \alpha / (1 + e_0 \cos \alpha)$. I find $\beta = 46' 39''$. Hanover, using the approximate formula $\beta = \alpha/2 - \tan^{-1}((1931/2069) * \tan(\alpha/2))$, gets $46' 26''$.

¹⁹⁴ $L_0 = 254^{\circ} 32' 52''$ at 6 p.m. mean time.

ברוחב ל"ב והוא רל"ח מעלה ח' חלקים ב' שניים¹⁹⁵ והוא פחות מאמצע השמש י"ז מעלה י' חלקים כ"ז שניים והוא שיעור שעה אחת ח' חלקים וחצי, מה שהוסיף הזמן האמצעי על הזמן האמיתי. ובעבור זה צריך לגרוע מהלך השמש בזמן הזה ממקום האמצעי וכן ממקום האמיתי ויוצא מקום האמצעי רנ"ה מעלה ט"ז חלקים כ"ט שניים ומקום האמיתי רנ"ד מעלה שלשים חלקים ג' שניים לעת השקיעה האמיתית והוא י"ד מעלה שלושים חלקים ושלשה שניים במזל קשת.¹⁹⁶ תיקח מהלך אמצע הירח לתשעים יום והא כ"ה מעלה נ"ב חלקים ל"ג שניים, נוסיפהו על העיקר יוצא רע"ו מעלה מ"א חלקים ט' שניים. תגרע מנתו, מנת הימים האמיתיים ממהלך הירח והוא ל"ז חלקים ל"ו שניים,¹⁹⁷ נשאר אמצע הירח לעת השקיעה האמיתית רע"ו מעלה ג' חלקים ל"ג שניים. תגרע אמצע השמש מאמצע הירח נשאר כ' מעלה מ"ז חלקים ד' שניים והוא מרחק הפשוט. תכפול זה המרחק, יוצא מרחק הכפול מ"א מעלה ל"ד חלקים ח' שניים.¹⁹⁸ תוציא מנת מרחק הכפול בדרך שהתבאר לעיל בהערה השביעית ויוצא מרחק מרכז גלגל ההקפה ממרכז הארץ 1146¹⁹⁹ ומנת מרחק הכפול ו' מעלות ג' חלקים.²⁰⁰ תוציא אמצע המסלול לתשעים יום והוא צ"ה מעלה וחמישים חלקים נ"ד שניים ותוסיפהו על העיקר, יוצא אמצע המסלול לשקיעת אמצע השמש חמש מעלות י"ט חלקים נ"א שניים. תגרע ממנו מנת שינוי יום האמיתי ויהיה ל"ז חלקים י"ח שניים בזה הזמן. תגרעהו מאמצע הירח, נשאר אמצע מסלול הירח לעת השקיעה האמיתית ד' מעלות מ"ב חלקים ל"ג שניים ולפי שמרחק הכפול הוא פחות מ-ק"פ תוסיף מנת מרחק הכפול על אמצע המסלול ויוצא המסלול הנכון והוא בזה המשל עשר מעלות מ"ה חלקים ל"ג שניים.²⁰¹ תוציא מנת המסלול הנכון כפי מרחק הארץ ממרכז גלגל ההקפה ותהיה מנתו נ"ה חלקים.²⁰² ולפי שמסלול הנכון פחות מ-ק"פ מעלה, תגרע מנתו מאמצע הירח ונשאר מקום הירח האמיתי לעת השקיעה האמיתית רע"ה מעלה ח' חלקים ל"ג שניים ויהיה המקום האמיתי ה' מעלות ח' חלקים ל"ג שניים במזל גדי. תוציא עוד מרחק הירח עצמו ממרחק הארץ ותעריך ותאמר כך, כערך בקע מנת המסלול הנכון אל 106 והוא חצי קוטר גלגל ההקפה כך ערך בקע המסלול הנכון אל מרחק הירח ממרכז הארץ ויהיה במשל הזה 1238 חלקים.²⁰³ תוציא עוד

¹⁹⁵ $\sin \delta = \sin \varepsilon * \sin L$ thus $\delta = -22^\circ 36' 09''$. $\text{Tang } \alpha = \cos \varepsilon * \text{tang } L$ thus $\alpha = 253^\circ 13' 33''$.

$\sin \Delta = \text{tang } \phi * \text{tang } \delta$, thus $\Delta = -15^\circ 04' 42''$. $\text{Maghrab} = \alpha + \Delta = 238^\circ 8' 51'' < l_0$.

$\alpha + \Delta - l = -17^\circ 10' 27'' = 1\text{h } 8\text{m } 31\text{s}$. Hanover rounded it to 30s. Thus sunset was at 4h 51m 30s p.m. mean time.

¹⁹⁶ In the first stage we had calculated the mean solar coordinates at 6 p.m. mean time. Now the sunset is in fact at $\Delta/15$ or 1h 0m 18s before at 4h 59m 42s true time. But $E = T_m - T = \alpha - l = -2^\circ 5' 46'' = -8\text{m } 23\text{s}$. Therefore $T_m = T - 8\text{m } 23\text{s} = 4\text{h } 51\text{m } 19\text{s}$ mean time. We must recalculate the solar coordinates 1h 8m 42s before 6 p.m. mean time. Thus Hanover recalculated l_0 and L_0 at the time the true sun is setting, which is 68.5 minutes before the end of the 90 days. In 68.5m, the mean sun moves $2' 49''$, which has to be subtracted from l_0 and L_0 .

¹⁹⁷ The movement in longitude of the moon during 1h 8m 42s.

¹⁹⁸ At sunset we have following data ; sun : $l_0 = 255^\circ 16' 29''$, $L_0 = 254^\circ 30' 03''$.

Moon: $l_1 = 276^\circ 03' 33''$, mean anomaly $= 4^\circ 42' 52''$, Elongation $\eta = 20^\circ 47' 04''$ and $2\eta = 41^\circ 34' 08''$.

¹⁹⁹ 1146 is the rounding off of 114582.35 after division by 100.

²⁰⁰ In the triangle **אבה**, the side **בה** = 100000, **בא** = 20766 and angle **באה** = $41^\circ 34' 08''$.

Therefore $\sin \text{angle } \text{באה} / 20766 = \sin 41^\circ 34' 08'' / 100000$. Angle **באה** = $7^\circ 55' 11''$ and angle **אבה** = $130^\circ 30' 41''$. Finally side **אה** / $\sin 130^\circ 30' 41'' = 100000 / \sin 41^\circ 30' 08''$. **אה** = 114582.35. Hanover writes 1146.

²⁰¹ In the triangle **אהכ**, the side **אה** = 114582.35, **אכ** = 20766 and the angle **כאה** = $180^\circ - 41^\circ 34' 08'' = 138^\circ 25' 52''$. We have then $\text{tang } (41^\circ 34' 08''/2) / \text{tang}[(\text{כ} - \text{ה}) / 2] = (114582.35 - 20766) / (114582.35 - 20766)$

Angle **כ** = $35^\circ 31' 27''$ and angle **ה** = $6^\circ 02' 41''$. The quota of the double elongation is thus $6^\circ 02' 41''$ and the true anomaly is $4^\circ 42' 52'' + 6^\circ 02' 41'' = 10^\circ 45' 33''$. This is exactly the value of Hanover.

²⁰² In the triangle **אהמ** the side **אה** = 114582.35, the side **המ** = 10576 and the angle **אהמ** = $169^\circ 14' 27''$.

We can write : $\text{tang } [(m - a) / 2] = \text{tang } (10^\circ 45' 33'' / 2) * [(114582.35 - 10576) / (114582.35 + 10576)]$. Angle **מהא** = $0^\circ 54' 18.5''$ and angle **המא** = $9^\circ 51' 14''$. The quota of the true anomaly is $54' 18.5''$. Hanover found $55'$. The true longitude of the sun is $276^\circ 03' 33'' - 54' 18.5'' = 275^\circ 9' 14''$, to compare with $275^\circ 8' 33''$.

²⁰³ Side **אמ** = $(\sin 169^\circ 14' 27'' / \sin 9^\circ 51' 14'') * 114582.35 = 124982.40$. Hanover calculates **אמ** slightly differently $(\sin 10^\circ 45' 33'' / \sin 55'') * 106 = 1237$, but he writes 1238.

מהלך הראש לתשעים יום והוא ד' מעלות מ"ו(ה) חלקים [נ"ז] שניים הפך סדר המזלות ובעבור זה תגרע מן העיקר נשאר מקום הראש בעת שקיעת השמש כ"ה מעלה ארבעים חלקים ואל תחוש אל ההבדל שבין יום האמיתי ויום האמצעי כי לא יזיק לפי שמהלך הראש בשעה הוא מעט. תגרע מקום הראש ממקום הירח האמיתי נשאר מסלול הרוחב²⁰⁴ רמ"ט מעלה כ"ח חלקים ל"ג שניים. תוציא מנת מסלול הרוחב²⁰⁵ כפי מה שהתבאר לעיל בהערה התשיעית יוצא ארבע(ים) מעלות מ"א חלקים והוא (מסלול) רוחב הירח. ולפי שמסלול הרוחב הוא יותר מ-ק"פ יהיה רוחבו רוחב דרומי.

ל"ב.²⁰⁶

ולזהיות כי כבר מבואר שהירח נוטה תמיד מעל גלגל המזלות ולא יהיה בגלגל המזלות רק בשתי נקודות הפגיעה שהן נקודת ראש תלי וזנבו נמשך מזה שנטייתו ממשוה היום ועליית ושקיעת הנקודה ממשוה היום עם הירח אינה שווה למעלות עליית ושקיעת משוה היום עם מקומו האמיתי אשר בגלגל המזלות²⁰⁷ בין באופק ישר בין באופק נוטה. לכן תעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל נוגע הנטייה הגדולה שהיא כ"ג מעלות וחצי כך ערך בקע קשת שהוא בין מקום הירח האמיתי ובין נקודת השיווי הקרובה אל נוגע קשת א.²⁰⁸ ואם מקום הירח במזלות הדרומיים ורחבו דרומי או במזלות הצפוניים ורחבו צפוני, תגרע רוחב הירח מן צ' מעלה ומן הנשאר תגרע עוד קשת א, נשאר קשת ב.²⁰⁹ אבל אם מקום הירח במזלות הצפוניים ורחבו דרומי או שמקומו במזלות הדרומיים ורחבו צפוני, תוסיף רוחב הירח על צ' מעלות ומן החיבור תגרע קשת א, נשאר קשת ב.²¹⁰ תצטרך בזה לשלוש הערות,²¹¹ ראשונה תעריך ותאמר כך, כערך בקע תשלום קשת א אל בקע תשלום קשת ב כך ערך בקע ס"ו מעלה וחצי אל בקע הנטייה המבוקשת.²¹² והנה בתנאי הראשון תמיד תהיה נטיית הירח ממשוה היום אל רוח אשר יהיה שם משוה הירח. אבל בתנאי בשני תהיה הנטייה הפך הרוח אשר שם הרוחב. ואולם כאשר יהיה מקום הירח קרוב ל-י"ב מעלות אל נקודת הפגיעה יתכן להיות גם בתנאי השני שתפנה הנטייה אל מקום הרוחב. שנית, תעריך עוד ותאמר כך, כערך בקע תשלום הנטייה אל בקע תשלום מרחק

²⁰⁴ The argument of latitude.

²⁰⁵ $\sin \beta_{\ell} = \sin (\text{argument of latitude}) * \sin 5^{\circ}$, we get $\beta_{\ell} (= -4^{\circ} 40' 55'')$. This allows us correcting the manuscript and suppress two incorrect additions: 4° and not 40° , latitude and not quota of the latitude. If we considered that this argument of latitude is an arc of the ecliptic then we would have $\tan \beta_{\ell} = \sin (\text{argument of latitude}) * \tan 5^{\circ}$ and we would have $\beta_{\ell} (= 4^{\circ} 41' 03'')$. Similarly the length of the arc of the moon's path would be given by $\tan x = \tan (\text{argument of latitude}) / \cos 5^{\circ}$ and $x = 249^{\circ} 32' 51''$. The differences are negligible.

²⁰⁶ The moon is not in the ecliptic; therefore the determination of its declination δ is problematic; now δ is necessary for the calculation of the setting of the moon. The present chapter will examine the calculation of δ_{ℓ} .

²⁰⁷ The point of the ecliptic which has the same longitude as the moon M. We will call this point M'; the arc MM' is perpendicular to the ecliptic.

²⁰⁸ $\tan \alpha = \sin \gamma M' * \tan 23.5^{\circ} = \sin \lambda_{\ell} * \tan 23.5^{\circ}$

²⁰⁹ $90^{\circ} - \beta_{\ell} - \alpha = \beta$

²¹⁰ $90^{\circ} + \beta_{\ell} - \alpha = \beta$

²¹¹ We must probably correct the text by : שלוש הערכות

²¹² $\sin (90^{\circ} - \alpha) / \sin (90^{\circ} - \beta) = \cos \alpha / \cos \beta = \sin 66.5^{\circ} / \sin \delta_{\ell}$.

Thus $90^{\circ} - \beta_{\ell} - \alpha = \beta$ and $\lambda < 180^{\circ}$ or $\beta_{\ell} < 0$ and $\lambda > 180^{\circ}$. $\sin \delta = \cos 23.5^{\circ} * \cos \beta / \cos \alpha$

But $\cos \beta = \cos (90^{\circ} - \beta_{\ell} - \alpha) = \cos (90^{\circ} - \beta_{\ell}) * \cos \alpha + \sin (90^{\circ} - \beta_{\ell}) * \sin \alpha$.

Now $\cos \beta / \cos \alpha = \cos (90^{\circ} - \beta_{\ell}) + \sin (90^{\circ} - \beta_{\ell}) * \tan \alpha = \sin \beta_{\ell} + \cos \beta_{\ell} * \tan \alpha$.

Finally $\sin \delta = \cos \epsilon * \cos \beta / \cos \alpha = \cos \epsilon * (\sin \beta_{\ell} + \cos \beta_{\ell} * \tan \alpha) = \cos \epsilon * \sin \beta_{\ell} + \sin \epsilon * \cos \beta_{\ell} * \sin \lambda_{\ell}$

Which is indeed identical with the formula for transformation from ecliptical into equatorial coordinates : $\sin \delta = \sin \beta * \cos \epsilon + \cos \beta * \sin \epsilon * \sin \lambda$. This formula is true in size and sign and exempts us from the discussion of the author.

הירח מנקודת השיווי הקרובה כך ערך בקע תשלום הרוחב אל בקע קשת ג.²¹³ ואם מקום הירח הוא מראש טלה עד סוף תאומים תגרע קשת ג מן צ' מעלות ואם מקום הירח מראש סרטן עד סוף בתולה תוסיף קשת ג על צ' מעלות. וכן אם מקום הירח מראש מאזנים עד סוף קשת תגרע קשת ג מן ר"ע מעלות ואם מקום הירח מן ראש גדי עד סוף דגים תוסיף קשת ג (מן) {על} ר"ע מעלות והיוצא מכל אחד ואחד אחרי שגרעת או אחרי אשר שהוספת הוא העלייה או השקיעה להירח באופק ישר.

שלישית, תוציא שקיעת המגראב למקום שקיעת השמש האמיתי בדרך אשר הראית לעיל ס' ל"א בהערה החמישית. ולפי שהשמש הוא על אופק המערבי בא"י תוסיף על שקיעת המגראב צ' מעלה, תוציא העלייה הישרה מ[נקודת] נוכח הראש אשר בעגולת חצי היום,²¹⁴ תגרע העלייה הישרה אשר בירח מן העלייה הישרה אשר בעגולת חצי היום וההבדל הזה הוא מרחק הירח באופן חצי היום.²¹⁵ ותעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל נוגע גובה המשוה²¹⁶ במדינה מן המדינות כך ערך בקע תשלום מרחק הירח באופן חצי היום אל נוגע קשת ד.²¹⁷ אם תהיה הנטייה צפונית תגרע הנטייה מן צ' מעלה ואם היא דרומית תוסיף הנטייה אל צ' מעלה והיוצא הוא קשת ה.²¹⁸ ואם יהיה מרחק הירח באופן חצי היום פחות מ-צ' מעלה תגרע קשת ד מקשת ה, נשאר קשת ו. ותעריך ותאמר כך, כערך בקע תשלום קשת ו כך ערך בקע רוחב המדינה אל בקע גובה הירח מן האופק.²¹⁹ ואולם אם מרחק הירח מאופן חצי היום יותר מ-צ' מעלה, תוסיף קשת ד על קשת ה ותעריך ותאמר כך, כערך בקע תשלום קשת ד אל בקע תשלום קשת ו כך ערך בקע רוחב המדינה אל בקע הגובה. וגובה הירח הוא קשת שבין הירח ובין האופק והוא קשת רביע עיגול היוצא מנקודת נוכח הראש ועובר על הירח ומגיע על האופק.

ל"ג.

ומעתה אעריך על שינוי מראה הגובה. המשל בצורה ט"ו, א הוא מרכז הארץ ב הוא מקום יושבי המדינה על גבנונית הארץ, ג הוא נקודת נוכח הראש ממדינת ב וקו האד הוא האופק (האמיתי) [המערבי], ל הוא מקום הירח אשר למעלה מן האופק המערבי. תוציא עגולה מנקודה נוכח הראש העוברת על מקום הירח עד האופק והיא עגולת גוזה, וכפי זה יהיה שינוי בין מקום הירח הנראה ובין מקומו האמיתי שהרי כאשר תוציא קו מנקודת א (שהוא מרכז הארץ והוא גם הוא מרכז גלגל המזלות) ועובר על הירח ומגיע בנקודה מגלגל המזלות שם הוא מקום הירח האמיתי בעגולת הגובה. והנה כאשר תוציא קו אלו יהיה מקום הירח האמיתי בנקודת ו וקשת ו זה שהוא מרחק הירח מן האופק הוא גובה הירח האמיתי, אבל אם תוציא קו מניצוץ עיניך, רצוני לומר מנקודת ב (שהוא מקום אשר אתה עומד עליו בגבנונית הארץ) ועובר על מרכז הירח שהוא נקודת ל ומגיע עד הנקודה מגלגל המזלות שהיא נקודת ז והוא קו בלוז, יהיה מרכז הירח בנקודת ז וקשת זה הוא גובה הירח

²¹³ $\cos \delta / \cos \lambda = \cos \beta / \sin \alpha$ or $\cos(90^\circ - \alpha) * \cos \delta = \cos \beta * \cos \lambda$.

But we know that $\cos \delta * \cos \alpha = \cos \beta * \cos \lambda$ (sine-theorem in the spherical triangle with the following vertices: equatorial pole, ecliptical pole and the celestial body, the moon).

Hence $(90^\circ - \alpha) = \alpha$ = the right ascension.

²¹⁴ $\text{Maghrab} + 90^\circ = \alpha + \Delta + 90^\circ = T_s$ = hour angle of γ = right ascension of the zenith.

²¹⁵ We get $\alpha_\gamma - \alpha_{\text{zenith}}$. This difference is precisely the hour angle of the moon.

²¹⁶ $\text{Maghrab} + 90^\circ = \alpha + \Delta + 90^\circ = T_s$ = hour angle of γ = right ascension of the zenith.

²¹⁷ $\text{Tang } \tau = \cotang \varphi * \cos(\alpha_\gamma - \alpha_{\text{zenith}}) = \cotang \varphi * \cos H_\gamma$.

²¹⁸ Thus $\eta = 90^\circ - \delta$ and $\nu = \eta - \tau$

²¹⁹ $\cos \tau / \cos \nu = \sin \varphi / \sin h_\gamma$. Thus $\sin h_\gamma = \sin \varphi * (\cos \nu / \cos \tau)$.

Now $\cos \nu = \cos(\eta - \tau) = \cos \eta * \cos \tau + \sin \eta * \sin \tau$.

$\cos \nu / \cos \tau = \cos \eta + \sin \eta * \text{tang } \tau$. but $\eta = 90^\circ - \delta$ and therefore $\cos \nu / \cos \tau = \sin \delta + \cos \delta * \text{tang } \tau$.

Thus $\sin h_\gamma = \sin \varphi * (\cos \nu / \cos \tau) = \sin \varphi * (\sin \delta + \cos \delta * \text{tang } \tau) = \sin \varphi * (\sin \delta + \cos \delta * \cos H_\gamma / \text{tang } \varphi)$

Hence $\sin h_\gamma = \sin \varphi * \sin \delta + \cos \delta * \cos H_\gamma * \cos \varphi$. This formula is identical to one of the formulas for transformation from equatorial coordinates to the local horizontal coordinates, the altitude h and the azimuth A:

$\sin h = \sin \varphi * \sin \delta + \cos \varphi * \cos \delta * \cos H$.

הנראה וקשת וז שהוא הבדל שבין מקומו האמיתי ובין מקומו הנראה הוא הנקרא שינוי מראה הגובה.²²⁰ וראוי שתדע כי המקום הירח הנראה בעגולת הגובה, מנקודת הגובה עד האופק תמיד הוא יותר קרוב אל האופק ממקום הירח האמיתי אשר בעגולת הגובה. והדרך אשר תמצא בו מנת שינוי מראה שהוא קשת וז הוא זה, תחבר מרחק מרכז הירח ממרכז [הארץ] אל חצי קוטר הארץ שהוא 2047 גם תגרע זה מזה, גם [תחבר] הגובה האמיתי אל צ' מעלה והיוצא תחלק לחצאין ותעריך ותאמר כך, כערך החיבור אל החיסור כך ערך נוגע חצי החלק אל נוגע קשת ז²²¹ והקשת הזו תגרע מחצי החלק והנשאר שינוי מראה הגובה.

ל"ד.

אחרי אשר הודעתך שיש שינוי מראה בעגולת הגובה מבואר שגם באורך וברוחב יהיה שם שינוי מראה בגלגל המזלות בין מקומו האמיתי ובין מקומו הנראה כאשר תראה בחוש בכדור המוגשם. והנה כדי שתמצא מקומו הנראה בגלגל המזלות ראוי שתדע תחילה כמה מעלות הן בקשת האופק שבין אמצע המערב ובין הנקודה מעגולת הגובה שהיא על האופק.²²² ותעריך ותאמר כך, כערך בקע תשלום (רוחב) [גובה] הירח אל בקע מרחק הירח מן אופן חצי היום הידוע כך ערך בקע קשת ה אל בקע תשלום רוחב שקיעת הירח מאמצע המערב לדרום.²²³ ועל דרך זה תמצא רוחב שקיעת החמה מאמצע המערב ותעריך ותאמר כך, כערך בקע תשלום רוחב המדינה אל בקע מרחק מקום החמה מנקודת השיווי הקרובה כך ערך בקע הנטייה הגדולה אל בקע רוחב שקיעת החמה.²²⁴ והנה כאשר יהיה השמש במזלות הצפוניים יהיה גם רוחב השקיעה מאמצע המערב לפאת צפון וכאשר יהיה במזלות הדרומיים, הנה גם רוחב השקיעה יהיה מאמצע המערב לפאת דרום. תחבר רוחב שקיעת החמה ורוחב שקיעת הירח²²⁵ יחד כאשר יהיה רוחב שניהם בשני צדדים ר"ל כאשר יהיה הרוחב האחד לפאת צפון והרוחב השני לפאת דרום, ותגרע זה מזה כאשר יהיה רוחב שניהם בצד אחד. והיוצא

²²⁰ The parallax in altitude. We consider the true moon in γ with the altitude h and the zenithal distance z ; and the apparent moon in γ' with the altitude h' and the zenithal distance z' .

The parallax is $p' = z' - z = h - h'$, the angle at γ in figure 15. We can write: $\sin p' = (\rho / R) * \sin z'$, with ρ = radius of the earth and R the distance moon – earth. When the celestial body is at the horizon then we have $z' = 90^\circ$ and $\sin p = \rho / R$.

²²¹ We can write according to the tangent- theorem :

$$R + \rho / R - \rho = [\tan (180^\circ - z' + p') / 2] / [\tan (180^\circ - z' - p) / 2']$$

$$R + \rho / R - \rho = [\tan (90^\circ + h) / 2] / [\tan (90^\circ + h - 2p') / 2]$$

Hanover writes

$$R + \rho / R - \rho = [\tan (90^\circ + h) / 2] / \gamma \text{ and } \gamma = (90^\circ + h - 2p') / 2.$$

Therefore $[(90^\circ + h) / 2] - \gamma = p'$

²²² Hanover wants to find $w = 90^\circ - Az$, the distance between the point W, the middle of the west and the foot of the quarter of the circle of altitude passing through the moon to the western horizon.

²²³ $\cos w = \sin \pi * \sin H_\gamma / \cos h_\gamma = \cos \delta * \sin H_\gamma / \cos h_\gamma$. Thus $\pi = 90^\circ - \delta$. The context proves that we must replace רוחב which usually denotes the latitude of the moon from the ecliptic, by גובה, the altitude above the horizon toward the zenith.

Now by the sine-theorem in the parallactic triangle we have the relation: $\sin z * \sin Az = \cos \delta * \cos H$, hence $\cos w = \sin Az = \cos \delta * \cos H / \cos h$. The formula of Hanover is thus identical to the former formula if we correct the text and replace the latitude by the altitude. It gives w or Az of the foot of the arc of altitude passing through the moon at the moment of sunset. This is clearly defined by the text:

However the following text is incorrect: $\text{כמה מעלות הן בקשת האופק שבין אמצע המערב ובין הנקודה מעגולת הגובה שהיא על האופק}$, because the moon at the moment of sunset is still above the horizon.

²²⁴ The distance w_0 between the middle of the west and the point of setting of the sun.

Hanover writes $\sin w_0 = \sin \varepsilon * \sin L_0 / \cos \varphi$. This formula has been demonstrated in note62; indeed $\sin \delta = \sin \varepsilon * \sin L_0$ because the sun is on the ecliptic. Thus $\sin w = \sin \delta / \cos \varphi = \sin \varepsilon \sin L_0 / \cos \varphi$.

²²⁵ See above; it is w_γ or A_γ at the moment of sunset.

נקרא הבדל רוחב השקיעה.²²⁶ ותעריך ותאמר כך, כערך בקע מרחק מקום השמש מנקודת השיווי הקרובה אל בקע תשלום רוחב המדינה כך ערך בקע המרחק שבין נקודת המשווה אשר על האופק או (המטאלע) [המגראב]²²⁷ ובין נקודת השיווי הקרובה אל בקע הזווית ההווה מעגולת האופק ומגלגל המזלות.²²⁸ וכן תעריך ותאמר, כערך כל הבקע אל בקע תשלום הבדל רוחב השקיעה כך ערך [בקע] הזווית מאופק ומגלגל המזלות אל בקע תשלום הזווית ההווה מעגולת הגובה ומגלגל המזלות.²²⁹ ותעריך עוד ותאמר כך, כערך כל הבקע אל בקע הזווית ההווה מעגולת הגובה ומגלגל המזלות כך ערך בקע שינוי מראה הגובה אל בקע שינוי מראה הרוחב.²³⁰ ותגרע שינוי מראה הרוחב מן הרוחב האמיתי אם יהיה רוחב צפוני ותוסיף שינוי מראה הרוחב על הרוחב האמיתי אם רחבו דרומי והיוצא הוא רוחב הירח הנראה.²³¹ ותעריך עוד ותאמר כך, כערך כל הבקע אל [בקע] תשלום הזווית ההווה מעגולת הגובה ומגלגל המזלות כך ערך נוגע שינוי מראה הגובה אל נוגע שינוי מראה האורך.²³² ושינוי מראה האורך בעת השקיעה הוא לעולם לגרוע ממקום הירח האמיתי, וישאר המקום הנראה.²³³

והעילה בפרטים האלה למה פעם גורעין ופעם מוסיפין היא העילה בעצמה מה שהוא השינוי מראה הגובה והוא לפי שהעין הרואה מגבנונית הארץ הוא הרואה את הכוכבים יותר נמוך ממה שהוא אילו הייתה רואה אותו ממרכז הארץ כפי מקומו האמיתי. ובעבור זה [אם] יהיה רוחב הירח צפוני שאז יהיה רוחב הירח כפי מקומו הנראה פחות ממה שהוא במקומו האמיתי בגלגל המזלות. על כן צריך לגרוע שינוי מראה הרוחב מן הרוחב האמיתי. וכן אם יהיה רוחב הירח דרומי צריך להוסיף שינוי מראה הרוחב על הרוחב האמיתי לפי שנראה נמוך אל האופק ובעבור זה יהיה [רוחב] הירח יותר גדול (מ) [ב]גלגל המזלות ממה שהוא כפי מקומו האמיתי בגלגל המזלות, והדברים הם מבוארים יותר אל החוש בכדור המוגשם וזה פשוט ולית דין צריך בשש.²³⁴ וזאת היא העילה בעצמה בשינוי מראה האורך בגלגל המזלות לפי שהירח נראה תמיד יותר קרוב אל האופק ממה שהוא באמת כפי הקו היוצא ממרכז הארץ לכן גורעין שינוי מראה האורך בהיות הירח מאופן חצי היום לפאת מערב. ואולם בהיות הירח מאופן חצי היום לפאת מזרח מוסיפין שינוי מראה האורך לפי שסדר המזלות הוא ממערב למזרח והירח נראה אז יותר קרוב לאופק המזרחי ממה שהוא באמת, על כן ראוי להוסיף שינוי המראה על מקומו האמיתי וזה ברור.

ל"ה.

²²⁶ It is $Az_c - Az_0$.

²²⁷ $Maghrab = \alpha + \Delta$.

²²⁸ Thus $\sin L_0 / \sin (90^\circ - \phi) = \sin (\alpha + \Delta) / \sin I$ where I is the angle ecliptic – horizon at the moment of sunset. This is the sine-formula, at sunset, in the spherical triangle equator- ecliptic and western horizon. Its sides are $\alpha + \Delta$, λ_0 and w ; its angles are I, $90^\circ - \phi$ and ϵ . I is given by: $\sin I = \cos \phi * \sin (\alpha + \Delta) / \sin \lambda_0$.

²²⁹ $\cos J = \sin I * \cos (w_c - w_0)$. J is, at sunset, the angle ecliptic – vertical between the ecliptic and the vertical passing through the moon at this moment. It is a formula in the rectangular spherical triangle horizon - ecliptic and vertical passing through the moon at the moment of sunset.

²³⁰ $\sin \Delta\beta_c = \sin p' * \sin J$, where $p' = \Delta h_c$, see note 220. $\Delta\beta_c$ is the parallax in latitude. This formula is exact if we assume that the true moon is north of the ecliptic, and the apparent moon M' is on the ecliptic. We consider then the spherical rectangular triangle: vertical passing through the moon M and M', the ecliptic, and the great circle of latitude passing through M. The formula is also exact when the apparent moon M' is south of the ecliptic, and the true moon M is on the ecliptic and we consider the spherical rectangular triangle: vertical passing through the moon M and M', the ecliptic, and the great circle of latitude passing through M'. In the general case, because the latitude of the moon is never greater than 5° and never below -5° , the formula must give close to correct results.

²³¹ $\Delta\beta_c = \beta_c - \beta'_c$. Thus $\beta'_c = \beta_c - \Delta\beta_c$.

²³² $\tan (\lambda_c - \lambda'_c) = \tan \Delta\lambda_c = \tan p' * \cos J$. This formula is exact in the two special cases outlined in the note above. In the general case, the accuracy here is about the same as in the parallax in latitude case.

²³³ $\Delta\lambda_c = \lambda_c - \lambda'_c$. Thus $\lambda'_c = \lambda_c - \Delta\lambda_c$.

²³⁴ B. Berakhot 40a.

וכן הדין בשינוי מראה מהעלייה הישרה והנטייה כי כל השינויים ההם יתהוו [מפני] שינוי מראה הגובה והדרך להגיע אל תכונת שינוי מראה הנטייה והעלייה הוא, תעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל בקע תשלום רוחב שקיעת הירח²³⁵ כך ערך בקע תשלום רוחב המדינה אל בקע תשלום הזווית ההווה מעגולת הגובה וממשה היום²³⁶ ותעריך עוד ותאמר כך כערך כל הבקע אל בקע שינוי מראה הגובה כך ערך בקע הזווית ההווה מעגולת הגובה וממשה היום אל בקע שינוי מראה הנטייה²³⁷ ובנטייה יהיה הדין כמו שהוא ברוחב הירח, רצוני לומר אם תהיה הנטייה צפונית תגרע ממנה שינוי המראה ואם היא דרומית תוסיף עליה שינוי המראה. עוד תעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל בקע תשלום הזווית ההווה מעגולת הגובה וממשה היום כך ערך נוגע שינוי מראה הגובה אל נוגע שינוי מראה העלייה הישרה²³⁸ והשינוי מראה הזה הוא לעולם לגרוע מן העלייה הישרה האמיתית בעבור היותו בחלק המערבי מאופן חצי היום והעילה כבר היא מבוארת לעיל ס' ל"ד.

ל"ו.

גם תוכל למצא המגראב מהירח והוא כאשר יהיה הירח עצמו על האופק המערבי עם איזו נקודה מנקודות משה היום שהיא גם היא בעת ההיא באופק המערבי²³⁹ כי תעריך ותאמר כך, כערך כל הבקע אל נוגע רוחב המדינה כך נוגע הנטייה הנראה אל בקע קשת ז²⁴⁰ וכאשר תהיה הנטייה הנראה צפונית תוסיף קשת ז (מן ה) [ל]עלייה הישרה הנראה והיוצא משניהם הוא המגראב או השקיעה העקומה מהירח. וההבדל שבין מגראב השמש ובין מגראב הירח זה הוא מה שקרא הרמב"ם ז"ל בשם קשת הראייה והוא כמה מהזמן הוא בין שקיעת השמש לשקיעת הירח עצמו.²⁴¹

ל"ז.

ולהתבונן אם אפשר שיראה הירח או לא יראה הירח, תוציא מרחק הירח מן המקום אשר אתה עומד עליו בגבנונית הארץ בזה הדרך כי תעריך ותאמר כך, כערך בקע תשלום הגובה הנראה אל בקע תשלום הגובה

²³⁵ As already mentioned above it concerns the distance w_ζ on the western horizon between the west point W and the foot of the vertical passing through the moon at sunset, with $w_\zeta = Az_\zeta - 90^\circ$. It does not concern the azimuth of the setting of the moon.

²³⁶ $1 / \cos w_\zeta = \cos \varphi / \cos K$; in the rectangular spherical triangle, considered at sunset, equator, western horizon and vertical passing through the moon. K is the angle between the vertical and the equator, and $90 - \varphi$ is the angle between the equator and the horizon.

²³⁷ $1 / \sin p' = \sin K / \sin (\delta_\zeta - \delta'_\zeta)$ or $\sin \Delta \delta_\zeta = \sin p' * \sin K$.

²³⁸ $1 / \cos K = \tan p' / \tan (\alpha_\zeta - \alpha'_\zeta)$ or $\tan \Delta \alpha = \tan p' * \cos K$. Both formulas are exact if we consider them in the spherical rectangular triangle: vertical passing through the moon as defined previously at sunset, the equator and the circle of declination. In other words Hanover makes the dubious assumption that the apparent moon M' is on the equator. The truth is that the declination of the moon can reach about $+28^\circ$ when it is northern and -28° when it is southern and therefore these formulas are much more imprecise than the former formulas given for the parallax in longitude and latitude.

²³⁹ Here we consider the moon on the horizon. Therefore we can deduce that this was not the case in the previous chapters.

²⁴⁰ $1 / \tan \varphi = \tan \delta_\zeta / \sin \zeta$. Or $\sin \zeta = \tan \varphi * \tan \delta_\zeta$. Thus $\zeta = \Delta_\zeta$. We can write Maghrab moon = $\alpha_\zeta + \Delta_\zeta$ and Maghrab sun = $\alpha_0 + \Delta_0$.

²⁴¹ Maghrab moon – Maghrab sun = Maimonides' arc of vision. If we add 90° to each of the preceding arcs we have $Ts_\zeta - Ts_0$. It is Maimonides' arc of vision; it represents an approximate value of the moonset lag because the coordinates of the moon were frozen at sunset and he did not take into account their evolution during the span of time between sunset and moonset.

האמיתי כך ערך מרחק מרכז הירח ממרכז הארץ אל מרחק מרכז הירח מן העין הרואה מעל גבנונית הארץ.²⁴² ותעריך עוד ותאמר כך כערך בקע מנת מסלול השמש אל 9730 כך ערך בקע מסלול השמש אל מרחק השמש [ממרכז] הארץ.²⁴³ ואל תחוש לשינוי מראה השמש מפני גודל המרחק. ותוציא עוד חלק הירח המאיר על הארץ בדרך זה, כי תחבר מרחק השמש מן הארץ אל מרחק [הירח] מעין הרואה ותגרע זה מזה, גם תגרע הגובה מן ק"פ מעלה והנשאר תחלק לחצאין ותעריך ותאמר כך, כערך החיבור אל החיסור כך ערך (חצי הנוגע) [נוגע חצי הנשאר] אל נוגע קשת ח.²⁴⁴ תחבר קשת ח אל חצי הנשאר והיוצא הוא קשת ט. תגרע קשת ט מן ק"פ מעלה והנשאר הוא החלק המאיר לארץ.²⁴⁵ ואם הנשאר הוא ה' מעלות נראה הירח ואם הנשאר פחות מזה אי אפשר שיראה הירח והעילה בזה לפי שאם הנשאר הוא חלק קטן מהירח ככובב אחד הגדול שבכוכבים ודאי נראה ואם הוא פחות מזה אי אפשר לראותו.²⁴⁶

ל"ח.

וכל הדברים האלה אשר דברנו בעניין ראיית הירח וחשבונות הירח כולם יתבארו באר היטב במופתים מושכלים [בספר] אשר יעדתי לחברו ואין כאן מקומו. מעתה נניח משל אחד²⁴⁷ ממנו יראה הרואה סדר החשבון וכן יעשה והוא מיוסד על יום ה' שני ימים לחודש טבת שנת חמשת אלפים וארבע מאות ושמונים וישישה לבריאת עולם שהוא תשעים יום אחרי יום העיקור אשר סמכנו עליו שהוא מיוסד על עת שקיעת החמה

²⁴² $\sin(90^\circ + h') / \sin(90^\circ - h) = \sin(90^\circ - h') / \sin(90^\circ - h)$ = R / r where R is the distance of the center of the moon from the center of the earth and r is the distance of the center of the moon from the observer. This formula is the application of the sine-formula in the triangle **לאב** of צורה ט"ו.

²⁴³ $\sin \beta / 9730 = \sin \alpha / d_s$; here d_s is the distance between the center of the sun and the center of the earth, α is the sun's anomaly: $l_0 - l_{\text{apogee}}$ and β is the quota of the anomaly. This formula is the application of the sine-formula in the triangle **האב** of צורה ח'. Hanover fixes the distance **אב** to 9730 and d_s is the distance **בה**. It must be noted that in the model of the ancients (Ptolemy, al-Battani) the distances are defined in relative value but not in absolute value.

²⁴⁴ $d_s + r / d_s - r = \tan(90^\circ - h'/2) / \tan \pi$; $\pi = 90^\circ - h'/2 + \tau$.

In order to understand this formula, we refer to צורה י"ח and to Smart, Textbook on Spherical Astronomy, §98: The phases of the planets and the moon. In modern astronomy we refer to the plane passing through the center of the earth, moon and sun, thus the plane of צורה י"ח. But we don't take into consideration the points **ב** and **ג** but only the center of the sun and the earth **ט** and **א**. The illuminated part of the moon is the angle **וה** which is equal to E, the geocentric elongation sun-moon. $E = 180^\circ - d$ where d is the angle between **דג** and **דב**, it is the selenocentric (as seen from the center of the moon) elongation of the earth from the sun.

The formula above is the application of the tangent-formula to the triangle **בדג** or equivalently the triangle **בדט**. The sum of the angles $\tau + \gamma$ is equal to $180^\circ - h'$ where h' is the angle **ב** and therefore half of it is $90^\circ - h'/2$. Angle π is then $\frac{1}{2}(\tau - \gamma)$ and τ is $\frac{1}{2}(\tau - \gamma) + 90^\circ - h'/2 = \frac{1}{2}(\tau - \gamma) + \frac{1}{2}(\tau + \gamma) = d = \tau$. This artifice avoids to making use of the very little angle **דגב**. And $E = h' + \gamma + \beta + \gamma = 180 - \tau = 180 - d = 180 - \pi = \tau$ = the illuminated part of the moon.

Thus $180^\circ - \tau = E$ = the lightened part of the moon. It seems that there is a mistake in this reasoning: the plane of צורה י"ח is the plane passing through the centers of the three bodies; it is not the plane of צורה ט"ו, which is a vertical plane passing through the moon and the northern zenith. In other words the formula $d_s + r / d_s - r = \tan(90^\circ - h'/2) / \tan \pi$; $\pi = 90^\circ - h'/2 + \tau$.

is incorrect: despite the fact that the sun is setting at the horizon h (or h') is not the elongation sun-moon, And in fact the formula is $\cos(h') \cdot \cos(\Delta Az) = \cos(E)$. For other formulas for E, in the ecliptic and equatorial coordinates, see Meeus, J; Astronomical algorithms, chapter 46.

²⁴⁵ The angle of the illuminated part of the moon as seen from the earth is $180^\circ - \pi$.

²⁴⁶ In fact the problem is much more intricate and the visibility of the moon crescent cannot be compared with the sighting of an isolated star. Danjon proved that it is impossible to see the new crescent when the elongation sun-moon is less than about 7° : see Danjon, A; Astronomie Générale, Paris 1986, p. 348

²⁴⁷ This example is the continuation of the second example **משל** examined in chapter 31.

האמיתית²⁴⁸ והיה מקום אמצע השמש רנ"ה מעלה ט"ז חלקים כ"ט שניים ומסלול השמש היה קנ"ז מעלה מ' חלקים ל"א שניים. והיה מקום השמש האמיתי רנ"ד מעלה שלשים חלקים ושלשה שניים והיא י"ד מעלה שלשים חלקים ג' שניים במזל קשת. והיה מקום אמצע הירח בעת ההיא רע"ו מעלה ג' חלקים ל"ג שניים ואמצע מסלול הירח היה ד' מעלות מ"ב חלקים ל"ג שניים ומרחק הכפול היה מ"א מעלה ל"ד חלקים ח' שניים ומנת מרחק הכפול שש מעלות ג' חלקים להוסיף ויצא המסלול הנכון עשר מעלות מ"ה חלקים ל"ג שניים ומנת מסלול נ"ה חלקים לגרוע ויהיה מקום הירח האמיתי רע"ה מעלה ח' חלקים ל"ג שניים והוא חמש מעלות ח' חלקים ל"ג שניים במזל גדי. ומרחק (ממרחק)[ממרכז] הארץ יהיה 1238 חלקים.²⁴⁹ ויהיה רוחב הירח לפאת דרום ד' מעלות מ"א חלקים²⁵⁰ ובעבור זה תהיה הנטייה הדרומית כ"ח מעלה וחמשה חלקים²⁵¹ ותהיה העלייה הישרה רע"ה מעלה מ"ט חלקים²⁵² והמגראב (ר"ל שקיעת החמה) הוא רל"ח מעלה ח' חלקים מ"ב שניים.²⁵³ והיה מקום גובה הירח האמיתי י"ב מעלה וחלק אחד²⁵⁴ ורוחב שקיעת הירח מ"ד מעלה כ"ז חלקים ושלשים שניים לפאת דרום²⁵⁵ ורוחב שקיעת החמה גם הוא לפאת דרום כ"ו מעלה נ"ו חלקים שלשים שניים.²⁵⁶

והבדל רוחב השקיעה י"ז מעלה ל"א חלקים,²⁵⁷ ושינוי מראה גובה הירח א' מעלה²⁵⁸ ויהיה א"כ הגובה הנראה י"א מעלה וחמשה חלקים, ויהיה שינוי מראה האורך ל"ט חלקים נ"ה שניים לגרוע ושינוי מראה הרוחב ל"ט חלקים נ"ד שניים להוסיף,²⁵⁹ ושינוי מראה נטיית הירח מ"ד חלקים ל"ה שניים להוסיף, ושינוי מראה העלייה

²⁴⁸ Here Hanover chooses an epoch coinciding with the true sunset. Generally he placed his epochs at 6 p.m. mean time. He considered also that Maimonides' epoch was at 6 p.m. mean time.

²⁴⁹ All the preceding data were already found in chapter 31, second example. As a reminder, at the time of the true sunset: for the sun: $l_0 = 255^\circ 16' 29''$; anomaly: $157^\circ 40' 31''$; $L_0 = 254^\circ 30' 03''$. For the moon: $l_1 = 276^\circ 03' 33''$; mean anomaly = $4^\circ 42' 33''$; double elongation = $41^\circ 34' 08''$; quota of the double elongation: $+6^\circ 3'$; true anomaly: $10^\circ 45' 33''$; quota of the true anomaly: $-55'$. $L = 275^\circ 8' 33''$. Distance earth-moon = 1238.

²⁵⁰ This was established at the end of chapter 31: $\beta (= -4^\circ 41')$

²⁵¹ We have proved in our notes to chapter 32 that the formulas of Hanover are exact and equivalent to our transformation formulas. We find thus that $\delta_1 = -28^\circ 05' 21''$. Hanover gives $\delta_1 = -28^\circ 05'$.

²⁵² We find for α_1 : $275^\circ 48' 40''$ which Hanover rounded off to $275^\circ 49'$.

²⁵³ $\text{Tang } \alpha_0 = \text{tang } L_0 * \cos \varepsilon$ and $\sin \Delta = \text{tang } \varphi * \text{tang } \delta_0$. With $\sin \delta_0 = \sin \varepsilon * \sin L_0$. We find $\alpha_0 = 253^\circ 10' 31''$, $\delta_0 = -22^\circ 35' 49''$; $\Delta = -15^\circ 04' 27''$ and $\alpha + \Delta = 238^\circ 06' 03''$.

²⁵⁴ $\sin h = \sin \delta * \sin \varphi + \cos \delta * \cos \varphi * \cos H$. H is the hour angle of the moon at the moment of sunset.

$H = \alpha_{\text{zenith}} - \alpha_{\text{moon}} = (\text{maghrab} + 90^\circ) - \alpha_{\text{moon}} = 328^\circ 06' 03'' - 275^\circ 48' 40'' = 52^\circ 17' 24''$.

Further $\delta (= -28^\circ 05' 21'')$ and $\varphi = 32^\circ$ therefore $h = +12^\circ 00' 44''$. Hanover gives $12^\circ 01'$.

²⁵⁵ We speak about the distance from the middle of the west to the vertical passing through the moon at the moment of sunset. We have seen that $\cos w_{\text{moon}} = \cos \delta_1 * \sin H_1 / \cos h_1$, $h = 12^\circ 00' 44''$, $H = 52^\circ 17' 24''$ and $\delta = -28^\circ 05' 21''$. We find $w_{\text{moon}} = 44^\circ 28' 29''$ in the southern direction. Hanover wrote $44^\circ 27' 30''$.

²⁵⁶ $\sin w_0 = \sin \varepsilon * \sin L_0 / \cos \varphi$; $w_0 = -26^\circ 56' 33''$.

²⁵⁷ The difference of azimuth between the setting sun and the moon at this moment: $44^\circ 28' 29'' - 26^\circ 56' 33'' = 17^\circ 31' 56''$ Hanover wrote $17^\circ 31'$.

²⁵⁸ $\sin p' = (\rho / R) * \cos h'$. $\rho = 20.47$ (see chapter 33) and $R = 1238$ (see chapter 31, second example) and $h = 11^\circ 56' 04''$. For a first approximation we consider h as an approximation of h and we find $p' = 55^\circ 37''$. $h' = h - p' = 11^\circ 27''$. We can make a second iteration and consider $h' = 11^\circ 27'$, we find now $p' = 55^\circ 43''$. A better calculation can be made through the formula

$R + \rho / R - \rho = [\text{tang } (90^\circ + h) / 2] / \text{tang } \tau$ and $\tau = (90^\circ + h - 2p') / 2$. Hence $\text{tang } \tau = (1238 - 20.47 / 1238 + 20.47) * \text{tang } (45^\circ + h/2)$. With $h = 11^\circ 56'$. We find $\tau = 50.04^\circ$ and $p' = 45 + h/2 - \tau = 50.97^\circ - 50.04^\circ = 0.93^\circ = 0^\circ 56' p' = 0^\circ 56'$.

The indication of Hanover is rough; we will see in note 265 that his parallax in altitude is in fact $57'$ very close to the former value.

²⁵⁹ First stage; calculation of the angle I between the ecliptic and the horizon at sunset.

$\sin I = \cos \varphi * \sin (\alpha + \Delta) / \sin L_0$. We find $I = 48^\circ 20' 37''$

Second stage: angle J between the vertical of the moon and the ecliptic. $\cos J = \sin I \cos (w_s - w_l) = \sin 48^\circ 20' 37'' * \cos 17^\circ 36' 26''$. $J = 44^\circ 35' 25''$.

Third stage: $\sin \Delta \beta = \sin J * \sin p'$; with $J = 44^\circ 35' 25''$ and $p' = 0^\circ 56'$ Hence $\Delta \beta = 39' 19''$

$\text{Tanf } \Delta \lambda = \text{tang } p' * \cos J$. Hence $\Delta \lambda = 39' 53''$. We ascertain that $(39' 53'')^2 + (39' 19'')^2 = (56')^2$

הישרה ל"ג חלקים נ"ד שניים לגרוע.²⁶⁰ ובעבור זה יהיה הבדל העלייה עשרים מעלה ושבעה חלקים והעלייה הישרה הנראה תהיה (אחרי שגרעת שינוי המראה)²⁶¹ רע"ה מעלה ט"ו חלקים וששה שניים. תגרע הבדל העלייה מן העלייה הישרה הנראה ותצא השקיעה העקומה מהירח רנ"ה מעלה ושמונה חלקים וההבדל שבין השמש והירח יהיה י"ז מעלה וחלק אחד והוא קשת הראייה.²⁶² תוציא עוד מרחק הירח מן העין הנמצאת באמצע א"י²⁶³ 1234 ומרחק השמש ממרכז הארץ²⁶⁴ 273633, תגרע הגובה הנראה מן ק"פ מעלות והנשאר תחלק לחצאין ויהיה החצי פ"ד מעלה כ"ח חלקים, תחברם יחד יוצא קס"ח מעלה נ"ג חלקים, תגרע אותו מן ק"פ מעלה, נשאר י"א מעלה ז' חלקים והוא חלק הירח המאיר לארץ²⁶⁵ ולפי שהוא יותר מחמש מעלות א"כ ודאי יראה הירח בכל ארץ ישראל. ואתה המאין תבין ותראה כי כל סדר החשבון הזה נכון [מאוד] ע"פ מופת התכונה בראיית הירח בדרך שהאיצטגנין מחשבין בו והוא חשבון מדוקדק קולע אל השערה ולא יחטיא.²⁶⁶ וכדי שתוכל לצייר בדמיון שינוי מראה האורך והרוחב מהנטייה והעלייה הישרה התבונן היטב בצורה י"ו כי שם תמצא משל הדומה אל הנמשל כי הנה עגולת **בדה** היא עגולת חצי היום העוברת על קוטב המזלות שהוא בנקודת **ה** ועל נוכח ראש המדינה ההיא שהיא בנקודת **ד** ועגולת **באג** היא עגולת אופק המערבי בא"י ונקודת **ב** {בדרום} ונקודת **ג** בצפון ועגולת **ואז** היא עגולת משוה היום ועגולת **העצפ** היא גלגל המזלות ונקודת **צ** ראש מאזנים ונקודת **ע** מקום השמש האמיתי והוא באופק השקיעה ומקומו במזל ק[שת]²⁶⁷ והירח למעלה מן האופק בנקודת **כ** לדרום המזלות. תוציא רביע העגול **הט** מקוטב גלגל המזלות שהוא בנקודה **ה** העובר על גוף

Hanover gives $\Delta\beta = 39' 55''$ and $\Delta\lambda = 39' 54''$ and $(39' 54'')^2 + (39' 55'')^2 = 56' 26''$ different from $60'$.

²⁶⁰ Calculation of angle K. $\cos K = \cos \varphi * \cos w_{\text{moon}} = \cos 32 * \cos 44^{\circ} 32' 59''$ hence $K = 52^{\circ} 49' 03''$; $\sin \Delta\delta_{\zeta} = \sin K * \sin p'$, we get $\Delta\delta_{\zeta} = 44' 19''$ and $\tan \Delta\alpha_{\zeta} = \cos K * \tan p'$, hence $\Delta\alpha_{\zeta} = 33' 51''$ with $K = 52^{\circ} 49' 03''$ and $p' = 0^{\circ}; 56'$.

²⁶¹ The brackets are from the author.

²⁶² $\sin \Delta_{\zeta} = \tan \varphi * \tan \delta$. We work with the values of Hanover: $\delta_{\zeta} = -28^{\circ} 05'$ and $\Delta\delta_{\zeta} = 44' 35''$, $\delta' = 28^{\circ} 49' 35''$. This gives $\Delta'_{\zeta} = -20^{\circ} 06' 53''$. Now $\alpha_{\zeta} = 275^{\circ} 49'$. $\Delta\alpha_{\zeta} = 33' 51''$ hence $\alpha'_{\zeta} = 275^{\circ} 15' 03''$. The Maghrab of the apparent moon is then $275^{\circ} 15' 03'' - 20^{\circ} 06' 53'' = 255^{\circ} 08' 10''$.

The Maghrab of the sun was $238^{\circ} 08' 42''$. The difference is indeed about 17° . The arc of vision is 17° or 1h 08m. The determination of this arc b representing the moon setlag was the end of Maimonides calculation: The criterium of visibility depended on the relation $b + \lambda_1 < 22^{\circ}$ where $\lambda_1 = \lambda_{\zeta} - \lambda_0$, is the difference between the longitudes of the true moon and the true sun, called by Maimonides the first longitude..

²⁶³ We refer to note 242. $r/R = \sin(90^{\circ} - h) / \sin(90^{\circ} - h')$. Hanover adopted $h = 12^{\circ} 01'$ and $h' = 11^{\circ} 05'$ and $R = 1238$. Hence: $r = 1238 * \cos 12^{\circ} 01' / \cos 11^{\circ} 05' = 1233.9 \sim 1234$.

²⁶⁴ We refer to note 243, $ds = (\sin \alpha / \sin \beta) * 9730$, where α is the sun's anomaly $157^{\circ} 40' 31''$ and β is the quota of the anomaly and was fixed to $46' 26''$ (although the precise calculation gives $46' 45''$). Thus $ds = (\sin 157^{\circ} 40' 31'' / \sin 46' 26'') * 9730 = 273645.9$. Hanover gives 273633.

²⁶⁵ Hanover follows the procedure described above: altitude of the apparent moon: $(180 - h')/2 = 84^{\circ} 28'$ thus $h' = 11^{\circ} 04'$ and $\Delta h = 12^{\circ} 01' - 11^{\circ} 04' = 57'$. In fact Hanover wrote $h' = 11^{\circ} 05'$ and therefore $\Delta h = 56'$. $\tan \pi = (ds - dl / ds + dl) \tan 84^{\circ} 28' = (273633 - 1234 / 273633 + 1234) * \tan 84^{\circ} 28'$, $\pi = 84^{\circ} 25' 01''$ $\psi = 90^{\circ} - (11^{\circ} 05'/2) + \pi = 168^{\circ} 53'$. The lightend part of the moon is $11^{\circ} 07'$.

This skilful calculation requires two remarks : 1) In modern astronomy it is recognized that the illuminated part of the moon is equal to the geocentric elongation E between the sun and the moon, also called in ancient astronomy a_L , the arc of light. Neither the parallax of the moon nor the position of the observer must be taken into consideration.

2) Hanover has reasoned as if the altitude of the (apparent) moon was the element governing the the breadth of the lunar crescent, as if the plane defined by the center of the earth, moon and sun was the meridian of the observer. In fact the governing element is the elongation and in our case it is much greater than the altitude of the moon.

In our case $h = 12^{\circ} 01'$ but $\Delta w = 44^{\circ} 27' 30'' - 26^{\circ} 56' 30'' = 17^{\circ} 31'$ according to the author's data. The elongation is then given by $\cos E = \cos h * \cos \Delta w$, hence $E = 21^{\circ} 08' 06''$. This can be also calculated by using the difference in longitude and latitude at sunset. Difference of longitude: $275^{\circ} 8' 33'' - 254^{\circ} 30' 03'' = 20^{\circ} 38' 30''$ and moon's latitude = $-4^{\circ} 41''$. Hence $\cos E = \cos 4^{\circ} 41' * \cos 20^{\circ} 38' 30''$ hence $E = 21^{\circ} 08' 37''$. The illuminated part of the moon is thus in fact $21^{\circ} 08'$ and the illuminated fraction of the moon is $k = (1 + \cos d) / 2 = \cos^2 d/2 = 0.0336 = 3.36\%$

²⁶⁶ Jud 20; 16.

²⁶⁷ The letter **ע** must be קשת,; **ז**: is the point Ω , the autumnal equinox.

הירח ועל גלגל המזלות בדרך זוויית ניצבת ותהיה נקודת ט מקום הירח האמיתי בגלגל המזלות והוא חמש מעלות במזל גדי וקשת כט הוא רוחב הירח לפאת דרום. תוציא עוד רביע עגול דכס מקוטב האופק שהוא בנקודת ד, העובר על מקום הירח ונופל על האופק בדרך זוית ניצבת בנקודת ס וא"כ קשת כס מזה העגול הוא גובה הירח האמיתי. ובעבור שינוי מראה הגובה אשר הראית בצורה ט"ו נראה הירח בנקודת מ והוא יותר קרוב [לאופק] בכדי קשת כמ ויהיה קשת מס הגובה הנראה וקשת כמ הוא שינוי מראה הגובה. תוציא עוד רביע עגול מקוטב גלגל המזלות על מקום הירח הנראה והיא עגולת [המ] החותך את גלגל המזלות בנקודת ל והוא מקום הירח הנראה בגלגל המזלות. תוציא קשת כנ ממקום הירח האמיתי המקביל לגלגל המזלות ויהיה קשת כנ שוה לקשת טל²⁶⁸ ויהיה שינוי מראה האורך לגרוע שהרי מקום הירח הנראה אשר בנקודת ל הוא פחות ממקום הירח האמיתי שהוא בנקודת ט. וכן קשת טכ שהוא רוחב הירח האמיתי, הוא פחות מקשת מל בכדי קשת מנ שהוא רוחב הירח הנראה ויהיה קשת מנ שינוי מראה להוסיף. וכין הדין בנטייה ובעלייה הישרה כמו בצורה י"ז: עגולת בדגז היא עגולת חצי היום העוברת על קוטב משוה היום אשר הוא בנקודת ה ועל קוטב האופק שהוא בנקודת ד ועגולת באג שהוא עגולת אופק המערבי באמצע א"י ועגולת ואז היא עגולת משוה היום ואמצע המערב באופק הוא בנקודת א ועגולת חקצפ היא עגולת המזלות והעגולה הזאת פוגעת בנקודת צ שהוא ראש מאזנים והשמש על האופק פונה לשקוע בנקודת ק והירח הוא בנקודת כ. תוציא רביע עגול מקוטב משוה היום העובר על המשוה עד הירח עצמו והיא עגולת הלכ. ויהיה קשת כל מזאת העגולה נטיית הירח לפאת דרום והיא הנטייה האמיתית ממשוה היום וקשת לאצ מהמשוה היא העלייה הישרה האמיתית. תוציא רביע העגול מקוטב האופק אשר בנקודת ד עובר על גוף הירח עד האופק והיא עגולת דכס והיא הנקראת עגולת הגובה וקשת כס מזאת העגולה הוא הגובה האמיתי מהירח ומפני שינוי מראה הגובה אשר הראית בצורה ט"ו יראה הירח יותר קרוב אל האופק וכאלו הוא עומד בנקודת מ ויהיה הגובה הנראה קשת מס וקשת כמ הוא שינוי מראה הגובה. תוציא רביע העגול מקוטב המשוה היום אשר בנקודת ה עד מקום הירח הנראה והוא עגולת הענמ, ויהיה קשת מע נטיית הירח הנראה שהיא יותר גדולה מהנטייה האמיתית שהיא קשת כל, בכדי קשת מ(כ) [נ]. ולפי שקשת נע שוה לקשת כל²⁶⁹, יהיה קשת מנ שינוי מראה הנטייה, וראוי להוסיפו על קשת כל, והיא הנטייה האמיתית כפי המקום הנראה וקשת צע ממשוה היום היא העלייה הישרה ממקום הירח הנראה והיא פחותה מקשת צ(כ) [ל] ממקום הירח האמיתי בכדי קשת לע מה שהוא שינוי מראה העלייה. וצריך לגרוע זה הקשת מהעלייה הישרה האמיתית. ובדרך הזה תוכל לצייר כל שינוי מראה בשאר המקומות והכלל בכל שינוי מראה יהיה שהשינוי מפאת עגולת הגובה בין באורך בין ברוחב. ובנקל תוכל לצייר קשת הראייה מזאת הצורה כי קשת צא היא מדת השקיעה העקומה משקיעת החמה אשר על האופק בנקודת ק ותהיה נקודת א עם נקודת ק על האופק בשוה. תוציא קשת רשת מקביל לאופק²⁷⁰ העוברת על מקום הירח הנראה בנקודת מ, ותהיה השקיעה העקומה ממקום הירח הנראה קשת צאש ויהיה ההבדל שבין שקיעת החמה ובין שקיעת הירח בכדי שיעור קשת אש ממשוה היום והיא הנקראת קשת הראייה. ולהבינך תוכן הדברים אשר דברנו מחלק הירח המאיר לארץ תראה בצורה י"ח: נניח שנקודת א הוא מרכז הארץ ונקודת ב הוא מקום גבנונית הארץ ליושביה ונקודת ט הוא מרכז החמה ונקודת ג הוא גבנונית השמש אשר למטה מן האופק שהוא קו אג ונקודת ד הוא מרכז הירח ועגולת זחה הוא הקף הירח המאיר כפי מה שיקבל אורו מן השמש ועגולת והכל הוא הקף הירח הנראה לעין הרואה מגבנונית הארץ אשר בנקודת ב. הנה מזאת הצורה התבאר כי חלק וה מהירח המאיר הוא הנראה לעין הרואה ולא יותר. על כן ראוי לך להתבונן אם זה החלק מהמאיר הנראה הוא חמש מעלות שאז אפשר שיראה החלק הקטן ההוא המאיר לעין הרואה ואם הוא פחות מחמש מעלות אין שום צד אפשרי לראותו. והעילה בזה כי כאשר יהיה החלק המאיר מן הירח לעין הרואה כשיעור כוכב גדול מן הכוכבים אז אפשר לראותו, ואם הוא פחות מזה כשיעור אי אפשר לראותו. ואם בעל נפש אתה²⁷¹ ויש מוח בקדקדך²⁷² לצאת ולבוא²⁷³ בחשבון התרת המשלשים ע"י בקעים ונוגעים אזי

²⁶⁸ Here the author makes an approximation as if he was in a plane. But a parallel to a great circle does not exist because every 2 great circles intersect and therefore the statement that כנ = טל is not exact.. He made the same approximation in Sefer tekhnat ha-Shamayim chap. 86.

²⁶⁹ Here the author makes an approximation as if the considered area of the sphere was a plane.

²⁷⁰ Here the author makes an approximation as if the considered area of the sphere was a plane. But in chap. 36 he calculated the arc of vision precisely.

²⁷¹ According to B. Hulin 6a.

²⁷² According to B. Menakhot 80b.

תבין ותשכיל כל הדברים בפרטיים אשר הבאתי בחשבונות האלה ומעתה לך לגורלך²⁷⁴ ותנוח דעתך²⁷⁵ במה שהורשית להתבונן.

ט"ל.

ועדיין אנו צריכין למודעי במה שכתבנו למעלה בס' ג' וס' ד' שיש שינוי באופקים ובאופני חצי היום כפי שינוי המקומות במושבותם כי לכל מקום ומקום יהיה אופק מיוחד אופן חצי היום מיוחד. ובעבור שהשינוי שבין הימים האמצעיים לימים האמיתיים הוא יותר גדול כאשר נתחיל בהם מעת השקיעה או מעת הזריחה ממה שנתחיל בהם באופן חצי היום כאשר הראית למעלה בס' י"ז, י"ח ו- י"ט, בעבור זה הסכימו בעלי תכונה להתחיל היום מאמצע היום, והוא בעת שהשמש הוא באופן חצי היום.²⁷⁶ ומן העת ההיא התחילו למנות עשרים וארבעה שעות עד חצות היום שאחריו ושיעור שעה אחת מן השעות הוא בכדי שיוכל לעבור ממשוה היום קשת המחזקת ט"ו מעלה ב' חלקים כ"ח שניים.²⁷⁷ ומכל זה מבואר שיש הבדל במספר התחלת היום בין המדינות השוכנות באורך המדינה ממזרח למערב שהרי בעת שהשמש הוא באופן חצי היום במדינה מן המדינות שאז יתחילו אנשי המדינה ההיא למנות מספר שעות היום. הנה בעת ההיא בעצמה עדיין לא הגיע השמש אל אופן חצי היום במדינה מן המדינות המערביות. ובעת שיגיע השמש אל אופן חצי היום במדינה ממדינות המערביות הנה בעת ההיא כבר עבר מקו חצי היום לפאת מערב (כשעה אחת או שתיים או יותר) במדינה ממדינות המזרחיות. [וכן] הדין בכל מדינה ומדינה שהיא מזרחית או מערבית למדינה אחרת וזהו השינוי שבין אופק [אופק] שבאורך המדינה אע"פ שהם שוים ברוחב. ויש עוד שינוי אחר בין האופקים שברוחב המדינה אע"פ שהם שוים באורך כי כל עוד שיתרבה רוחב המדינה לצפון כך הימים [מתארכים] והולכים לפי שהכוכבים מתאחרים לשקוע כל עוד שבאופקים הנוטים לצפון יותר ממה שהם שוקעים [באופקים] שרחבם פחות מהם ר"ל אינם נוטים כ"כ לצפון. וכפי זה הונח בידך שיש הבדל בין מדינה ומדינה אם בהתחלת היום והוא במדינות המשתנות באורך או במדת אורך היום וקצרו וזהו במד[ינות] המשתנות ברוחב. או שיש שינוי בשניהם יחד וזהו במדינות המשתנות בין באורך בין ברוחב כי המדינות השוכנות על קו השווה באורך המדינה ואין להם רוחב, הנה מדת היום שוה לכל המדינות ההן והוא שיעור י"ב שעות תמיד, אבל יהיה ביניהם הבדל בתחילת היום הטבעי ובאמצע היום בעת שיתחיל היום במדינה ממדינות המזרחיות עדיין לא התחיל היום במדינה ממדינות המערביות. וכן הדין באמצע היום כי אופני חצי היום שבמדינות אשר באורך המ[דינות] נבדלים זה מזה. וכן במדינות הנוטות לצפון שיש להם רוחב אחד ואין להם אורך אחד, הן שוות במדת היום ואינן שוות בהתחלת היום ובאמצע היום. [וכן] המדינות שהן שוות באורך ואין להן רוחב אחד והן המדינות שאופן אחד מאופן חצי היום שוה להן, הנה המדינות ההן שוות בעת חצי היום לפי שבכל המדינות יגיע השמש באופן חצי היום ברגע אחד לפי שיש להן אורך אחד ואולם לפי שאין להן רוחב אחד לכן עם היות שאין נבדלות זו מזו באמצע היום עכ"ז הן נבדלות במדת היום באורך ובקוצר. גם הן נבדלות זו מזו בהתחלת הימים הטבעיים כי במדינות הנוטות יותר לצפון יהיו הימים שלהן יותר ארוכים ויקדים בהן השמש לזרוח כאשר יהיה השמש במזלות הצפוניים ממה שהוא זורח במדינות שרחבם פחות מהן וההפך בהיות השמש במזלות הדרומיים רצוני לומר שאז יהיו הימים יותר קצרים במדינה הנוטה לצפון יותר לפי שיתאחר השמש לזרוח בה ממה שהוא זורח במדינה שרחבה פחות ממנה. ויש עוד מדינות שאינן שוות לא באורך ולו ברוחב הוא ש[מדינה] אחת נוטה לצפון יותר ממדינה אחרת וגם היא נוטה יותר ממנה לפאת מערב. הנה במדינה כזאת והדומה לה יהיה בה הבדל במדת אורך היום וקוצרו, גם יהיה ההבדל באמצע היום ומ.... שיהיה שם הבדל בזריחה ושקיעה, כי ראוי שתדע כי בשתי מדינות הנבדלות באורך וברוחב יתכן שתקדם זריחת השמש במדינה המערבית ממה שהוא זורח במדינה המזרחית וכן בשקיעה יתכן שתקדם שקיעת השמש במדינה (המזרחית) [המערבית] ממה שהוא שוקע במדינה (המערבית) [המזרחית]. ודבר זה מבואר יותר בכדור המוגשם ובמשל

²⁷³ Deut. 31; 2.

²⁷⁴ According to Jud. 1; 3 and Daniel 12; 13.

²⁷⁵ B. Sabbath 152b and elsewhere.

²⁷⁶ In the time of Hanover the astronomical day still began at noon (and not at midnight).

²⁷⁷ 1 hour mean solar time = 1.002738 sidereal time = 15° 02' 28".

בצורה י"ט:²⁷⁸ נקודת ו היא אמצע א"י שרחבה ל"ב מעלה לצפון ואופן חצי היום שלה הוא כהוא ורוחב המדינה הוא הו וקו גהד הוא קו השווה ונקודת ב אמצע הדרום ונקודת א אמצע הצפון, ד מזרח ג מערב ומדינה אחרת השוכנת למערב א"י ברוחב אחד היא נקודת ח אופן חצי היום שלה היא עגולת בחא. וא"כ כאשר השמש זורח ועולה במזרח באופן המדינה המזרחית שהיא מדינת ו והיינו מדינת א"י הנה השמש עולה בה בנקודה מנקודות עגולת בזא שהיא עגולת אופן א"י הרי כפי זה תקדם הזריחה בא"י לזריחת מדינת ח שהיא מערבית לה. וכן הדין באמצע היום כי השמש יגיע לאופן חצי היום במדינת ו קודם שיגיע לאופן חצי היום במדינת ח. וכן הדין בשקיעה ר"ל שהשמש יגיע לאופן המערבי במדינת ו קודם שיגיע לאופן המערבי במדינת ח. ואם תהיה מדינה אחת בנקודה ט שרחבה ששים מעלה שהיא שוה באורך למדינת ו, שהרי אופן חצי יום אחד שוה לשתייהן אלא שאין להן רוחב אחד. הנה בהיות השמש בנזלות הצפוניים כגון בראש סרטן אזי תהיה זריחת השמש במדינת ט קודם זריחת השמש במדינת ו שהיא מדינת א"י שהרי המטאלע שהוא עליית השמש באופן המזרחי במדינת ט יהיה אז מ"א²⁷⁹ מעלה ח' חלקים ובמדינת ו שהיא מדינת א"י יהיה המטאלע ע"ד מעלה י"ד חלקים וכפי זה יקדם עליית השמש במדינת ט על עליית השמש שבמדינת ו בכדי ל"ג מעלות²⁸⁰ שהן יותר משתי שעות. וכן הדין בשקיעה שהרי המגראב שהוא שקיעת השמש באופן המערבי במדינת ט יהיה אז קל"ח מעלה נ"ב חלקים והמגראב שבמדינת ו שהוא מדינת א"י יהיה ק"ה מעלה מ"ו חלקים וכפי זה תתאחר שקיעת השמש במדינת ט על מדינת ו יותר משתי שעות. וא"כ יהיה השינוי בשתי המדינות האלה בין במידת [היום] ובין בהתחלת היום הטבעי ובין בסוף היום הטבעי עם היות שאין ביניהם שינוי בעת אמצע היום. ואולם אם תהיה מדינה אחת בנקודה כ שהיא צפונית מערבית למדינת ו שהן נבדלות באורך וברוחב אזי יש בהן שינוי בשקיעה ובזריחה, גם יהיה השינוי בזמן חצי היום שהרי כאשר יהיה חצות היום במדינת ו, הנה בעת ההיא יהיה זמן שעה אחת קודם חצות היום במדינת כ שהיא שוכנת ט"ו מעלה ממדינת ו באורך המדינה לפאת מערב. וא"כ יהיה שינוי בשתי מדינות האלה בזריחת השמש שהרי המטאלע באופן ו הוא ע"ד מעלה י"ד חלקים בהיות השמש בראש סרטן²⁸¹ והמטאלע באופן כ שהוא רוחב ששים מעלה מ"א מעלה ח' חלקים וכפי זה תקדם הזריחה באופן כ על הזריחה באופן ו בכדי שעה אחת אע"פ שמדינת כ היא מערבית למדינת ו, והעילה בזה לפי שההבדל שבין אופני חצי היום משתי המדינות באלה הוא ט"ו מעלה שהוא שיעור שעה אחת בקירוב²⁸² וההבדל שבין מטאלה מדינת ו ובין מטאלע מדינת כ הוא ל"ג מעלות ו' חלקים שהוא יותר משתי שעות. מבואר א"כ ביאור מספיק שתקדם זריחת השמש במדינת כ על זריחת השמש במדינת ו יותר משעה אחת. ובהיות השמש בראש גדי אזי תהיה השקיעה שהוא המגראב במדינת ו רנ"ד מעלה י"ד²⁸³ חלקים והמגראב שבמדינת כ יהיה רכ"א מעלה ח' חלקים ויהיה ההבדל ל"ג מעלה ו' חלקים שהוא יותר משתי שעות. אמנם לפי שמדינה כ נוטה למערב ממדינת ו בכדי ט"ו מעלות שהוא שיעור שעה בקרוב נמשך מזה שתקדם שקיעת החמה במדינת כ על השקיעה שבמדינת ו יותר בכדי שעה אחת. ויש עוד שינויים או חילופים אחרים זולת מה שהזכרנו ואין צורך להזכירם פו לפי שאין בהם תועלת בחשבון הראייה, אבל ראוי שתדע זה השינוי אשר הזכרנו והוא שינוי בין מדינה למדינה בזמן השקיעה, על כן יתכן שהירח אינו נראה בא"י ונראה במדינה שהיא מערבית לא"י לפי שתתאחר שם שקיעת השמש עד שיתכן שיתרחק הירח מן השמש קודם שקיעתו בכדי קשת שאפשר שיראה הירח במדינה ההיא באופן המערבי. ולפי שהמדינות מתחלפות בהתחלת הימים הטבעיים לכן עש(א)[ו] חז"ל חיזוק לדבריהם²⁸⁴ בסדר העיבור ולא נתנו דבריהם לשיעורים²⁸⁵ וקבעו התחלת היום לערב בזמן שהשמש שוקע במערב כשהוא בראש טלה או בראש מאזנים שאז הימים והלילות שווים. ותהיה התחלת היום לעולם בשש שעות אחר חצות היום ומעת ההיא התחילו למנות שעות היום שאחריו וכדרך שהיום הולך אחרי הלילה שעבר כדין תורה. גם קבעו חשבונם על אמצע א"י וכל בני הגולה גם הם סומכין על החשבון ההוא כאלו כולם כאחד ענו ואמרו מקודש מקודש, לפי שאין קובעין שנים ומעברין חדשים

²⁷⁸ The representation is made for people living in the southern hemisphere.

²⁷⁹ In the manuscript : 45° 8'

²⁸⁰ 33° 6' exactly.

²⁸¹ Thus $\alpha = 90^\circ$ and Δ is $+15^\circ 46'$ in the country ו and it is $+48^\circ 52'$ in the country כ.

²⁸² Perhaps Hanover means that in sidereal time this difference is a bit more than an hour, but in mean solar time, the difference of time between two places separated by 15° longitude is exactly 1 hour.

²⁸³ Thus $\alpha = 270^\circ$ and Δ is $-15^\circ 46'$ in the country ו and it is $-48^\circ 52'$ in the country כ.

²⁸⁴ This expression is frequently mentioned in the Talmud: for example B. Eruvin 77a and 85b.

²⁸⁵ According to B ; Hulin 9a.

בחו"ל ואנן שליחותיהו דידהו קא עבדינן.²⁸⁶ לכן אין חילוק בין בני מזרח ובני מערב בעשיית המועדים אפילו בזמן שהיו מקדשין על פי ראייה, כי כולם עושים י"ט ביום אחד ואין ביניהם רק הפרש בשעות כפי מקומותם למושבותם.²⁸⁷

מ.

אם תרצה לדעת הקיבוץ האמיתי שהוא עת קיבוץ המאורות, צריך שתדע תחלה עת קיבוץ ה[אמצעי] בדרך זה: כי ראוי שתדע כי השמש מתרחק מן הירח במהלכו האמצעי י"ב מעלה י"א חלקים (י"א) [כ"ז]²⁸⁸ שניים. והעת העיקר אשר עשינו אנחנו לעת שקיעת החמה²⁸⁹ שהיא שש שעות ט"ו חלקים ז' שניים אחר חצות יום ו', כ"ט לחודש אלול הוא ער"ה משנת חמשת אלפים תפ"ו לב"ע על אופק א"י, בעת ההיא מרחק הירח מן השמש במהלכם האמצעי ארבע מעלות י"א חלקים מ"ט²⁹⁰ שניים. והנה כאשר תרצה לדעת עת מולד האמצעי²⁹¹ מר"ח טבת שהם פ"ח ימים אחר העיקר, תחבר [מהלך] הירח²⁹² ב-פ"ח ימים (שהוא שנ"ב מעלה מ"ז חלקים עשרה שניים)²⁹³ אל העיקר, יוצא שנ"ו מעלה נ"ז חלקים נ"ט שניים,²⁹⁴ ותצטרך לחבר אליו עוד שלש מעלות ושני חלקים²⁹⁵ ושניה אחת עד תשלום ש"ס מעלה שאז יהיה הירח מכוון תחת אמצע השמש בשוה ויהיה המולד האמצעי. תחבר ג' מעלות ושני חלקים ושניה אחת אל העיקר יוצא המולד האמצעי בשש שעות י"א חלקים כ"ח שניים²⁹⁶ על ליל ב שהוא יום אחד לחודש טבת באמצע א"י והוא פ"ח ימים ה' שעות נ"ו חלקים כ' שניים אחרי עת העיקר. תחבר מהלך אמצע השמש ומהלך הגובה ומהלך אמצע המסלול הירח מן פ"ח יום ה' שעות נ"ו חלקים כ' שניים אל העיקר (ואין צורך לחבר מהלך אמצע הירח לפי שבעת [הקיבוץ] האמצעי יהיו שני האמצעיים מהירח [והשמש] שוים) יוצא מקום אמצע החמה רנ"ג מעלה ל"ה חלקים [ל"ט] שניים²⁹⁷ ומקום הגובה צ"ו [מ] מעלה ל"ה חלקים נ"ח שניים ומקום אמצע המסלול הירח שמ"ב מעלות כ"ו חלקים ושניה אחת. תגרע מקום הגובה מן אמצע השמש יהיה מסלול השמש ק(צ)[נ] ה' מעלה נ"ט חלקים מ"א²⁹⁸ שניים ומנת המסלול חמשים חלקים. ולפי שמסלול השמש פחות מ-ק"פ מעלה תהיה מנת המסלול לגרוע

²⁸⁶ B. Bava Kama 84b.

²⁸⁷ According to Gen. 36; 40 and 43.

²⁸⁸ The moon's velocity is $13^{\circ} 10' 35.03''$ /day; the sun's velocity is $0^{\circ} 59' 8.33''$ /day and the relative velocity is then $12^{\circ} 11' 26.70''$ /day. We will see that Hanover uses the correct value; the 11s in the manuscript is a mistake of the copist.

²⁸⁹ This statement is surprising. Indeed in chap 31 Hanover fixed his epoch at 6 p.m. mean time. and this moment is coherent with the epoch that he chose in his other writings. Here he adopts the moment of true sunset. His calculations in chapter 31 were effectively made on the basis of an epoch at 6 p.m. mean time.

²⁹⁰ The subtraction of the data gives $170^{\circ} 48' 36'' - 166^{\circ} 36' 48'' = 4^{\circ} 11' 48''$.

²⁹¹ It is the mean conjunction and not the traditional molad. In Luhot Ha'Ibur I table 1 (also in Techumat Hashamayim chapters 67, 68), Hanover brings a way of finding the mean conjunction from the molad, according to modern astronomy and in Luhot Ha'Ibur II table 1 he calculates it according to ancient astronomy (Maimonides).

²⁹² It is in fact the velocity of the elongation moon – sun.

²⁹³ $12^{\circ} 11' 26.70'' * 88 = 352^{\circ} 47' 10''$

²⁹⁴ The addition gives in fact $4^{\circ} 11' 49'' + 352^{\circ} 47' 10'' = 356^{\circ} 58' 59''$.

²⁹⁵ The exact value is in fact $3^{\circ} 1' 1''$ but the following calculation is performed with $3^{\circ} 2' 1''$.

²⁹⁶ $3^{\circ} 2' 1'' / 0.507948 = 5h 56m 20s$ according to Hanover. But the precise calculation gives 2 minutes more minutes. Hence $6h 15m 7s + 5h 58m 20s = 12h 11m 27d$ p.m. = 6 h 13m 27s after the beginning of the Jewish day. Hanover writes that this was on Monday but since the epoch was after the beginning of Shabbat, 88 days later was certainly on Wednesday.

²⁹⁷ $13^{\circ} 10' 35.03'' * 88d 5h 56m 20s = 82^{\circ} 47' 00''$. Add to $170^{\circ} 48' 36''$ and the result is $253^{\circ} 35' 37''$.

²⁹⁸ $253^{\circ} 35' 39'' - 97^{\circ} 35' 58'' = 155^{\circ} 59' 41''$.

ואמצע מסלול [הירח] הוא בעצמו המסלול הנכון בעת המולד האמצעי כי בזמן ההוא אין [שום]²⁹⁹ מרחק כפול לגמרי ומנת המסלול הנכון הוא מעלה אחת כ"ד חלקים.³⁰⁰ ולפי שמסלול הנכון הוא יתר [מק"ף] מעלה, תהיה מנת המסלול להוסיף. וכלל זה נקוט בידך אם תהיינה מסלול השמש [וגם] מסלול הירח שתיהן להוסיף, תגרע הקטן מן הגדול. אבל אם תהיה אחת להוסיף ואחת [לגרוע] תחבר שתיהן יחד והיוצא הוא ההבדל אשר ביניהם במעלות, או תאמר שהוא מרחק מקום השמש האמיתי ממקום הירח האמיתי. ותוציא מהלך השמש והירח בשעה כפי המסלול והוא שתוציא מנת מסלול השמש והירח שהוא מעלה אחת יתר מ[עכשו] ותגרע המנות זו מזו [ותעריך] ותאמר כך: כערך מעלה אחת אל הבדל המנות כך ערך מהלך האמצעי לשעה שהוא ב' חלקים ו-כ"ח שניים בשמש או ל"ב [חלקים] ארבעים שניים לירח אל הבדל מהלך לשעות. [ואם] יהיה מסלול השמש או הירח עד צ' מעלה או מן ר"ע עד ש"ס מעלה, תגרע הבדל היוצא מן [אמצע] מהלך לשעה אבל אם יהיה המסלול מן צ' עד ר"ע מעלה, תוסיף ההבדל ההוא על אמצע מהלך והיוצא הוא מהלך האמיתי לשמש או לירח לשעה. ואחרי שיש בידך מהלך המאורות ב[שעה] אחת תגרע מהלך השמש ממהלך הירח, נשאר מהלך הירח מן השמש בשעה ותעריך ותאמר כך: כערך מהלך הירח מן השמש בשעה אל שעה אחת כך ערך מרחק מקומות האמיתיים מהמא[ורות] אל ההבדל שהוא בין המולד האמצעי ובין המולד האמיתי בשעות.³⁰¹ ודע כי כאשר תהיה מנת מסלול הירח יתר ממנת מסלול השמש אזי יתחלף הבדל הזמן ממה שהיא מנת מסלול ה[ירח] רצוני לומר אם תהיה מנת מסלול הירח להוסיף צריך לגרוע הבדל הזמן ואם היא לגרוע [צריך] להוסיף הבדל הזמן על זמן המולד האמצעי. אבל אם מנת מסלול השמש היא יתירה על מנת מסלול הירח יהיה הבדל הזמן שוה למנת מסלול השמש אם להוסיף או לגרוע. והעילה בזה דין הוא זה: אם מקום הירח האמיתי יתר על מקום השמש האמיתי א"כ כבר היה המולד האמיתי [קודם] למולד האמצעי לכן צריך לגרוע הבדל הזמן כדי שיהיה בידך זמן המולד האמיתי אבל אם מ[קום] השמש האמיתי הוא יתר על מקום הירח האמיתי, א"כ צריך שיתנועע הירח עוד עד שי[גיע] תחת השמש בשוה ויהי המולד האמיתי אחרי המולד האמצעי לכן צריך שתוסיף הבדל הזמן על זמן המולד האמצעי ויהיה בידך המולד האמיתי. עיין מה שהתבאר לעיל ס' כ"ב ו-ס' כ"ג ומשם תוכל להבין תוכן הדבר כי שם התבאר שהבדל הזמן שבין מולד האמצעי למולד האמיתי הוא כ"ד שעות בקירוב לכל היותר ודבר זה תוכל להתבונן בדרך זה כי מנת מסלול השמש שהוא בתכלית הגדול שתי מעלות והוא בהיות מסלול צ"ב מעלה וא"כ מהלך השמש בשעה הוא ב' חלקים כ"ח שניים.³⁰² וכן הדין בהיות מסלול השמש רס"ח מעלה. ומנת מסלול הירח בזמן שאין לה מרחק הכפול היא בתכלית הגדול והיא חמש מעלות והוא בהיות מסלול הירח צ"ה מעלה או רס"ה מעלה.³⁰³ ואז מהלך הירח בשעה ל"ג חלקים י"א שניים.³⁰⁴ תחבר המנות יחד (כאשר יהיה האחד להוסיף והשני לגרוע) יוצא ז' מעלות. תגרע מהלך המאורות

²⁹⁹ There is marginal word beginning with a ש.

³⁰⁰ At the mean conjunction there is no quota of the moon's anomaly, the mean anomaly is equal to the true anomaly and we can immediately calculate the quota of the true anomaly: $\beta_c = 1^\circ 24'$.

³⁰¹ Things will become clearer with the following explanation. The principle is the following: normally we divide the distance between sun and moon by the relative mean velocity moon-sun (mean velocity of the moon – mean the velocity of the sun) and we get the time necessary for the moon to catch up the sun, as far as the true conjunction follows the mean conjunction. The great originality of Hanover is to consider the true velocities of the moon and of the sun instead of their mean velocities; for this purpose he compares two consecutive positions of the mean body separated by 1 degree and the corresponding true positions; this allows him computing the true displacement when the mean displacement is 1° and consequently the true velocity. This method of finite difference is useful in cases where it is not easy to find an analytical description of the function considered. The sign of the two quotas is important for the determination of the distance between true moon and sun at the moment of mean conjunction and the relative position of moon and sun must determine whether the true conjunction precedes or follows the mean conjunction.

³⁰² $L_0 = l_0 - \beta_0$ and $d L_0 / dt = d l_0 / dt - d \beta_0 / dt$. Hence when β_0 is extremum, the true velocity = the mean velocity = $2' 27.85''$ / hour.

³⁰³ See Ajdler, J; Hikhhot Kiddush ha-Hodesh al-pi ha-Rambam p. 198.

³⁰⁴ I do not understand this statement and this figure; how did he arrive at this number. When the quota of the true anomaly is extremum at the conjunction, then the true velocity is equal to the mean velocity and is $32' 56.41''$ / hour.

זה מזה בשעה, נשאר שלשים חלקים מ"ג שניים והן מרחק המאורות לשעה, יוצא י"ג שעות י"א³⁰⁵ דקים ומעט יותר וזהו הזמן היותר גדול שאפשר להיות בין זמן המולד האמצעי ובין זמן המולד האמיתי בין לפניו בין לאחריו נחזור אל המשל שהקדמנו ומצאנו כי מנת מסלול השמש היה לגרוע [חמישים חלקים ומנת מסלול הירח היה] מעלה אחת כ"ד חלקים [להוסיף] ולפי שאחד הוא להוסיף ואחד לגרוע תחבר שתי המנות יחד ויוצא שתי מעלות י"ד חלקים. ולפי שמנת מסלול הירח הוא יותר ממנת מסלול השמש וגם מנת מסלול הירח היא להוסיף, א"כ מקום הירח הוא יתר ממקום השמש. והירח יהיה בעת המולד האמצעי ממזרח השמש.³⁰⁶ א"כ כבר יהיה המולד האמיתי קודם המולד האמצעי לכן תגרע ההבדל מן הזמן האמצעי ויהיה בידך זמן המולד האמיתי. תוציא מנת מסלול השמש [כש] הוא במעלה אחת יתר ממה שהוא בעת המולד האמצעי לפי שהמולד האמיתי היה קודם למולד האמצעי³⁰⁷ ויהיה המסלול קנ"ז מעלה ומנתו מ"ז חלקים נ"א שניים וההבדל שבין המנה הראשונה למנה השנית הוא ב' חלקים ט' שניים.³⁰⁸ ותעריך ותאמר: כערך מעלה אחת אל הבדל המנות כך ערך ב' חלקים כ"ח שניים (והוא מהלך אמצע השמש לשעה) אל הבדל מהלך השמש האמיתי ויוצא ה' שניים.³⁰⁹ ולפי שהמסלול הוא מן צ' עד ר"ע מעלה תוסיפם על מהלך אמצע השמש ויוצא ב' חלקים ל"ג שניים והוא מהלך השמש האמיתי לשעה. וכן תעשה במסלול הירח הוא שתוציא המנה ממסלול ש"ג מעלה כ"ו חלקים והיא מעלה אחת [י"ט] חלקים.³¹⁰ וההבדל שבין המנה הראשונה למנה השנית הוא ה' חלקים ותעריך ותאמר כך: כערך מעלה אחת אל הבדל המנות כך ערך ל"ב חלקים וארבעים שניים³¹¹ (והוא מהלך מסלול הירח בשעה) אל הבדל המהלך האמיתי ויוצא שתי (מעלות) [חלקים] מ"ג (חלקים) שניים.³¹² ולפי שמסלול הירח הוא מן ר"ע מעלה עד ש"ס מעלה תצטרך לגרוע ממהלך אמצע הירח לשעה והוא ל"ב חלקים [נ"] שניים.³¹³ נשאר שלשים חלקים י"ג שניים וזהו מהלך הירח האמיתי לשעה.³¹⁴ תגרע מהלך המאורות בשעה זה מזה, נשאר כ"ז חלקים ארבעים שניים לשעה³¹⁵ [ותעריך ותאמר כערך הבדל מהירות המאורות אל השעה] כך ערך מרחק מקומות המאורות (והוא שתי מעלות י"ד חלקים) אל הבדל הזמן שהוא בין המולד

³⁰⁵ If the quota of the solar anomaly is also extremum, the sun's true velocity is equal to the mean velocity and their relative velocity has the mean value $30' 28.01''$ / hour. The maximum interval of time between true and mean conjunction is $7^\circ / 30' 28.56'' = 13h 47m$.

³⁰⁶ Thus the moon passed already beyond the sun.

³⁰⁷ I do not understand the argumentation; on the contrary it would be more fitting to consider the sun with an anomaly of 1° less, because we are calculating the true velocity of the sun just before the mean conjunction and not after. In fact the solar anomaly at mean conjunction was $155^\circ 59' 41''$ and one should consider the anomaly $154^\circ 59' 41'' \sim 155^\circ$. The quota of 156° is $50'$ and the quota of 155° is $51' 58''$, thus when the anomaly and the mean longitude increases by 1 degree the true anomaly passes from $154^\circ 08' 02''$ to $155^\circ 10'$ and the true longitude increases by $1^\circ 01' 58''$ and the true velocity is the mean velocity multiplied by 1.033.

³⁰⁸ Thus when the anomaly is 156° the quota is $50'$ and for 157° the quota is $47' 51''$ (I find $48' 04''$) to subtract. Thus when the mean longitude increases by 1° , the true anomaly increases from $155^\circ 10'$ to $156^\circ 12' 09''$ i.e. by $1^\circ 2' 9''$ and the true longitude increases by the same amount $1^\circ 2' 9''$; the mean velocity is multiplied by 1.036.

³⁰⁹ $1^\circ / 2' 09'' = 2' 28'' / (\text{true velocity} - \text{mean velocity})$. Hence the true velocity – mean velocity = $5.3''$ / hour.

Therefore the true velocity is $2' 28'' + 5.3'' = 2' 33.3''$ / hour. The velocity was multiplied by 1.037 instead of 1.033 which should have been used.

³¹⁰ Hanover considers the moon at the mean anomaly of $342^\circ 26' 1''$ at the mean conjunction and the situation at the anomaly $343^\circ 26' 1''$ although it would have better to consider it at $341^\circ 26' 1''$.

For $342^\circ 26' 1''$ we found $1^\circ 24'$, for $343^\circ 26' 1''$ it is $1^\circ 19'$. Thus the true anomaly passes from $343^\circ 50'$ to $344^\circ 45'$ and increases by $55'$. The mean velocity is multiplied by 0.9167, hence $32' 56.46'' * 0.9167 = 30' 12''$ / hour as the moon slows down.

³¹¹ The velocity of the moon mean anomaly per hour.

³¹² $1^\circ / 5'' = 32' 40'' / (\text{true velocity} - \text{mean velocity})$, Hence (true velocity – mean velocity) = $2' 43''$ / hour

³¹³ The moon's velocity in longitude. The longitude of the moon is $L_\zeta = l_\zeta - \beta$. Thus $d L_\zeta / dt = d l_\zeta / dt - d \beta / dt$. It is the mean velocity of the longitude that we must consider $32' 56.46''$ / hour.

³¹⁴ $32' 56'' - 2' 43'' = 30' 13''$ / hour.

³¹⁵ $30' 13'' - 2' 33'' = 27' 40''$.

האמצעי למולד האמיתי.³¹⁶ ויהיה במשל הזה ארבע שעות חמישים חלקים ל"ג שניים. רגע זה מזמן המולד האמצעי, נשאר עת המולד האמיתי באמצע א"י והיא שעה אחת כ' חלקים מ"ח שניים³¹⁷ בליל (ב) [ד] שיומו אחד לחודש (שבת) [טבת] שנת תפ"ו לפ"ק ובעת ההיא היה הזמן האמצעי. ואם תרצה לעשותו לזמן אמיתי עיין לקמן ס' מ"ב משם תראה וכן תעשה. וכן הדין בכל מולד ומולד ותבין ותשכיל כי ברוב השנים יהיה המולד האמיתי בתשרי קודם למולד האמצעי ואז אפשר שיקדם לו קרוב ל- י"ד שעה לפי שבעת ההיא יהיה השמש קרוב למזל מאזנים ויהיה המסלול קרוב ל-צ' מעלה ובמקום ההוא תהיה מנת המסלול בתכלית הגדול ולגרוע מן האמצעי. ולהיות שברוב יהיה מקום הירח יתר ממקום השמש, על כן יהיה המולד האמיתי קודם למולד האמצעי. ואולם אם יהיה המולד האמיתי בחודש הזה אחר המולד האמצעי לא יתכן בשום אופן שיקדים המולד האמצעי למולד האמיתי יותר מששה שעות. ובחודש ניסן הוא בהפך לפי שאז תהיה מנת מסלול השמש להוסיף וע"פ הרוב יהיה מקום השמש יתר ממקום הירח האמיתי ויהיה המולד האמיתי אחר המולד האמצעי ואז יתכן ג"כ שיהיה המולד האמיתי אחר המולד האמצעי בכדי י"ד שעות. אבל אם בחודש [ניסן] יהיה המולד האמיתי קודם המולד האמצעי לא יתכן בשום [אופן] שיקדים לו יותר משש שעות.

מ"א.

והנה כאשר תרצה לדעת אם יהיה לקוי החמה צא וחשוב מרחק הירח מראש [התלי] והוא הנקרא מסלול החוחב. אם יהיה מסלול הרוחב עד ח"י מעלה או קס"ב או קצ["]ב או [ש"ב מעלה, שאז אפשר להיות לקוי החמה בהיותו בכדי י"ח מעלה מראש תלי או מזנב, לפנייהם או לאחריהם, אבל אם יהיה המרחק יותר מ-י"ח מעלה מנקודות התלי אזי אי אפשר לקוי החמה בכל העולם. ושאר חשבונות הלקויים יתבארו היטב בספר אשר יעדתי לחברו.

מ"ב.

אם תרצה לדעת עת התקופה האמיתית (וכבר ידעת כי בהיות השמש האמיתי [בראש] מזל טלה אז תהיה תקופת ניסן ובראש סרטן היא תקופת תמוז ובראש מאזנים היא תקופת תשרי ובראש גדי היא תקופת טבת) תוציא תחלה מקום הגובה לעת [הר"ח ?] בקירוב לפי שמהלך הגובה בחודש אינו רק ה' שניים ואין מדקדקים בשניים, והנה כ[אשר] יהיה בידך מקום הגובה, תגרע מקום הגובה מן ש"ס בתקופת ניסן ומן צ' מעלה בתקופת תמוז ומן ק"פ מעלה בתקופת תשרי ומן ר"ע מעלה בתקופת טבת והנשאר נקרא מס[לול] התקופות. ותעריך ותאמר כך: כערך 100000 אל 3465 3/11 כך ערך בקע [מסלול] התקופות אל בקע מנת מסלול התקופות.³¹⁸ ודע שאם יהיה מסלול התקופות פחות [מ-ק"פ] מעלה תהיה מנתו להוסיף³¹⁹ ואם יהיה המסלול

³¹⁶ 27' 40" / 1 hour = 2° 14' / span of time: hence span of time = 4h 50m 36s.

³¹⁷ Alexander Weiss noted that this value is different from the values calculated with Luhot ha-Ibbur I and Luhot ha-Ibbur II.

³¹⁸ Refer to ח' צורה: π is a position of the sun on the epicycle, ϵ is the mean position of the sun and ϵ_{si} is the true position of the sun (as seen from the earth). The angle π is the mean anomaly, the angle ϵ is the true anomaly and the angle ϵ_{si} is the true vernal equinox, in π it is the true summer solstice and in ϵ_{si} it is the true winter solstice. The triangle $\triangle \pi \epsilon \epsilon_{si}$ the side $a = \pi \epsilon$ is 100000, the side $b = \pi \epsilon_{si}$ is 3465 3/11 and the angle ϵ is 180° – true anomaly when the true anomaly is $< 180^\circ$ or the true anomaly $- 180^\circ$ when the true anomaly is $> 180^\circ$. We know thus two sides and the angle opposite to one of these sides. In such a case the classical solution of

יתר מ-ק"פ מעלה תהיה מנתו לגרוע. ו[היוצא] הוא מקום אמצע השמש לעת ההיא³²⁰. תוציא הימים והשנים שעברו אחרי העיקר עד [זמן] אמצע השמש ההוא והיוצא תחבר אל העיקר ויהיה בידך זמן התקופה מימים אמצעיים³²¹, תעשם לימים אמיתיים³²² בדרך זה: תוציא העלייה הישרה ממקום השמש האמיתי והיא ב[תקופת] ניסן ש"ס מעלה³²³ ובתקופת תמוז צ' מעלה והתקופת תשרי ק"פ מעלה וב[תקופת] טבת ר"ע מעלה. תגרע אמצע השמש מן העלייה הישרה או בהפך והנשאר תעשה לש[עות] והיוצא הוא הבדל השעות האמיתיות לאמצע השמש. אם תהיה העלייה הישרה יתר [מאמצע] השמש יהיה ההבדל לגרוע מזמן האמצעי ואם העלייה הישרה פחותה מאמצע השמש יה[יה] ההבדל להוסיף מזמן האמצעי. והיוצא הוא הזמן האמיתי מתקופה האמיתית וכל זה מיוסד על אמצע א". וכאשר תרצה לדעת תקופה האמיתית ממקומות אחרים צריך שתחבר או ש[תגרע] איזה זמן כפי מרחק המדינה ההיא למזרח או למערב כאשר הו[ו](ר)[ד] עתיך ב-ס' []³²⁴ ע"ש ה[ערת] על כל מה שאמרנו פה. ומעתה אמשול לך משל, אם תרצה לדעת העת והרגע אשר תחול תק[ופת] ניסן האמיתית משנת תפ"ו שהיא שנת העיבור יהיה בין שעת העיקר ובין ראש חודש ניסן שבעה חדשים ובתוך הזמן ההוא התנועע גובה השמש ל"ו שניים³²⁵, תחברם אל מקום הגובה שבעיקר שהיה צ"ז מעלה ל"ה חלקים מ"ד שניים ויוצא מקום הגובה צ"ז מעלה ל"ו חלקים כ' שניים. תגרע מקום הגובה מן ש"ס מעלה לפי שהוא בתקופת ניסן, נשאר רס"ב מעלה כ"ג חלקים ארבעים שניים וזהו מסלול התק[ופת].³²⁶ תוציא מנתו והיא מעלה אחת נ"ז חלקים ל"ה שניים³²⁷, ולפי שמסלול התקופה הוא יתר על ק"פ מעלה תגרע מנתו ממקום אמצע השמש שהוא בזה המשל בראש טלה והוא ש"ס מעלה ויוצא אמצע השמש שנ"ח מעלה ב' חלקים כ"ה שניים והוא אמצע השמש בעת התקופה האמיתית. תגרע מזה אמצע השמש אשר היה בעת העיקר והוא קס"ו מעלה ל"ו חלקים מ"ח שניים, נשאר קצ"א [מעלה] כ"ה חלקים ל"ז שניים וזהו אמצע השמש אשר התנועע מעת העיקר עד עת תקופת ניסן האמיתית. תוציא כמה ימים ושעות שעברו מיום העיקר עד כדי מהלך אמצע השמש כשיעור הזה ויוצא קצ"ד [ימים] ה' שעות ט' דקים.³²⁸ תחברם לעת העיקר שהוא ביום ו' ער"ה שנת תפ"ו לפ"ק לעת ערב בשקיעת החמה, והיתה עת התקופה³²⁹ בפעם ההיא ט"ו דקי השעה על ליל ז'. יוצא ה' שעות כ"ד דקים³³⁰ ליל ה' שיומו י"ח אדר שני משנה זו וזהו הזמן האמצעי אשר בו היתה התקופה האמיתית. תגרע עוד אמצע השמש מן העלייה הישרה לעת התקופה האמיתית והוא ש"ס מעלה, נשאר מעלה אחת נ"ז חלקים³³¹ ל"ה שניים והוא מנת מסלול התקופה. תעשם לשעות כאשר התבאר ב-ס' [י"ט ו- כ"א] ויוצא ז'

the triangle is the application of the sine-formula. At the true vernal equinox the sun is in מ. The angle מאב is $262^\circ - 180^\circ = 82^\circ 23' 40''$. We find that $\beta = \text{במא} = 1^\circ 58' 04''$.

³¹⁹ We subtract the quota of the anomaly from the mean longitude to get the true longitude of the sun. But here we have the true longitude of the sun, i.e. 360°) and by adding the quota we get the mean longitude corresponding to the known true longitude. We get the mean sun at the moment of the true equinox.

³²⁰ At the time of the true equinox.

³²¹ We get the mean time of the true equinox.

³²² At his time the civil life was still organized in true time.

³²³ We want to find $E = \alpha - l$. But in the four particular points $\alpha = L_0 = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ or 360°

³²⁴ See Tekhumat ha-Shamayim chap.51 and the tables at the end of the book; see also Luhot ha-Ibbur II, table 19 and the corresponding explanations.

³²⁵ In fact in 7 months $\sim 7 * 29.5 = 206$ or 207 days the movement of the apogee is maximum $207 * 0.15 = 31''$ instead of $36''$.

³²⁶ The true anomaly, thus the angle measured from the earth מאב.

³²⁷ I find $1^\circ 58' 04''$. Hanover gave $1^\circ 57' 35''$. The mean sun's longitude is thus according to Hanover $l_0 = 358^\circ 2' 25''$. At the epoch it was $166^\circ 36' 48''$. The difference is $191^\circ 25' 37''$.

³²⁸ $191^\circ 25' 37'' / 0^\circ 59' 08.33'' = 194\text{d } 5\text{h } 08\text{m } 49\text{s}$.

³²⁹ Not very clear: he means that on this day sunset was at 6h 15m mean time p.m. and the word התקופה should be replaced by השקיעה.

³³⁰ 6h 15m p.m. + 5h 09m 11h 24m p.m. or 5h 24m into the night beginning the first Jewish day of the year 5486.

³³¹ $E = \alpha - l = 360^\circ - l = 1^\circ 57' 35''$.

דקים מ"ט שניים³³² ולפי שהעלייה הישרה יתר מן האמצע צריך שתגרע הבדל הזה מן הזמן האמצעי, נשאר ה' שעות ט"ז דקים י"א שניים על ליל ה' שיומו י"ח אדר שני משנת תפ"ו לפ"ק והוא הזמן האמיתי אש[ר] תחול בו תקופת ניסן האמיתית והיא מיוסדת על אמצע א". ואולם במדינות אחרות יהיה בהן הבדל בפחות ויתר כגון מדינת הנובר שהיא למערב א"י בכדי שתי שעות שני דקים³³³ לכן תגרע השיעור הזה מן עת התקופה שהיתה בא"י ויוצא ג' שעות י"ד דקים על ליל ה', י"ח אדר שני שנת תפ"ו לפ"ק. והיא עת התקופה האמיתית במדינת הנובר שאני המחבר שוכן בה. ומזה תקיש גם על המדינות. ואתה קורא משכיל עמוד והתבונן והבן במראה ושים [ל]בך עליו כי דבר זה חדש הוא אשר העליתי בחקירה ועיון כי יי הטובה עלי.³³⁴ משל אחר: אם תרצה לדעת זמן תקופת טבת משנת תפ"ז לפ"ק הנה מיום העיקר עד ר"ח [טבת] שנת תפ"ז לפ"ק ט"ז חדשים לפי ששנה זו שנת העיבור היא. ובזמן ההיא התנועע הגובה פ"ב³³⁵ שניים, תוסיפהו על מקום הגובה אשר בעיקר, יוצא מקום הגובה צ"ז מעלה ל"ז חלקים ו' שניים. תגרע מקום הגובה מן ר"ע שהוא מקום השמש האמיתי בתקופת טבת, נשאר קע"ב מעלה כ"ב חלקים נ"ד שניים וזהו מסלול התקופה. תוציא מנתו והוא ט"ו חלקים מ"ד שניים, ולפי שהמסלול פחות מ-ק"פ מעלה תוסיף מנתו על מקום השמש האמיתי שהוא ר"ע מעלה, יוצא אמצע השמש ר"ע מעלה ט"ו חלקים מ"ד שניים והוא אמצע השמש לעת התקופה האמיתית. תגרע מזה אמצע השמש אשר היה בעת העיקר, נשאר (כ) [ק] ג' מעלה ל"ח חלקים נ"ז שניים. ולפי שהזמן שבין עת העיקר ובין עת תקופת טבת האמיתית משנת תפ"ז [ל]פ"ק הוא יותר משנה אחת משנות החמה, תוסיף על הנשאר עוד ש"ס מעלה יוצא תס"ג מעלה ל"ח חלקים (ו') [נ"ז] שניים וזהו מהלך אמצע השמש אשר התנועע מיום העיקר עד עת התקופה האמיתית. תוציא כמה ימים וכמה שעות שעברו מיום העיקר בכדי שיתנועע אמצע השמש המהלך הזה, יוצא [ת] "ע ימים ט' שעות ל"ז חלקים. תחברם לעת העיקר והוא ט"ו דקים על ליל ז' שיומו א' לחודש תשרי תפ"ו לפ"ק יוצא ת"ע ימים ט' שעות נ"ב חלקים לפי ששנת תפ"ו היתה מעוברת וחדשיה חסרים א"כ ימי שנת תפ"ו היה שפ"ג ימים, תגרע מן הימים מה שהתנועע השמש, נשאר פ"ז ימים ט' שעות נ"ב חלקים ושנת תפ"ז חדשיה שלמים א"כ תגרע ששים יום העולים מחודש תשרי וחדש חשון מן הנשאר והוא ויוצא כ"ז ימים ט' שעות נ"ב חלקים והוא ט' שעות נ"ב חלקים על ליל א' שיומו כ"ח כסלו והוא הזמן האמצעי שתחול בו התקופה האמיתית. תגרע העלייה הישרה ממקום השמש האמיתי (שהוא ר"ע מעלה בזה המשל) מן אמצע השמש, נשאר ט"ו חלקים מ"ד שניים והוא מנת המסלול בעצמה. תעשם לשעות כמו שהודענו ב-ס' [כ"ב] ויוצא ששת דקי השעה.³³⁶ ולפי שהעלייה הישרה היא פחותה מאמצע השמש תוסיף ההבדל על הזמן האמצעי ויוצא הזמן האמיתי ט' שעות נ"ח דקים על ליל א' שיומו כ"ח כסלו משנת תפ"ז לפ"ק והיא העת והרגע שתחול בה תקופת טבת האמיתית מיוסדת על אמצע א". אבל בשאר המדינות יש בהן הבדל בקודם ואיחור כפי מרחק מנדינות מאמצע ארץ ישראל כגון במדינת הנובר שהיא רחוקה מאמצע א"י לפאת מערב שתי שעות ושני דקים.³³⁷ תגרע זה השיעור מזמן התקופה שהיא בא", נשאר עת התקופה במדינת הנובר ז' שעות נ"ו חלקים על ליל א' שיומו כ"ח כסלו שנת תפ"ז לפ"ק.

העתקתי מהספר שחבר החכם השלם התוכן הגדול ר' רפאל סג"ל מק"ק הנובר.

³³² $1^{\circ} 57' 35'' * 4 = 7m 50.33s$. But Hanover is very precise on this point. E is expressed in sidereal time and we must convert it in mean time, multiplying by 0.997270; this gives 7m 49s. He expresses it on the following way: one mean hour corresponds to the $15^{\circ} 02' 28''$ on the celestial equator.

³³³ The longitude of Jerusalem is 35.2 E, that of Hanover is 9.7 E and that of London is 0.1 W. Hanover gives in Luhot ha-Ibbur a distance between Jerusalem and London of 2h 21.7 m which is excellent but for the distance Jerusalem Hanover he gives 2h 4.7 m (instead of 2h 2m here) instead of the correct value of 1h 42m. This is really surprising; he had not a correct appreciation of the difference in longitude between London and Hanover, two towns which had close political ties!

³³⁴ According to Ezra 7; 6 and 9 and Nehemia 2; 8.

³³⁵ In 16 months the movement of the apogee is $16 * 29.5 * 0.15 = 70.8'' \sim 71''$ and not $82''$.

³³⁶ $E = 15^{\circ} 44''$ corresponds to 1m 03s. Hanover writes 6 minutes which seems far out.

³³⁷ The difference of longitude is $35.2 - 9.7 = 25.5^{\circ}$ corresponding to 1h 42m. In in Luhot ha-Ibbur table 19 he gives: 2h 85 halakim.

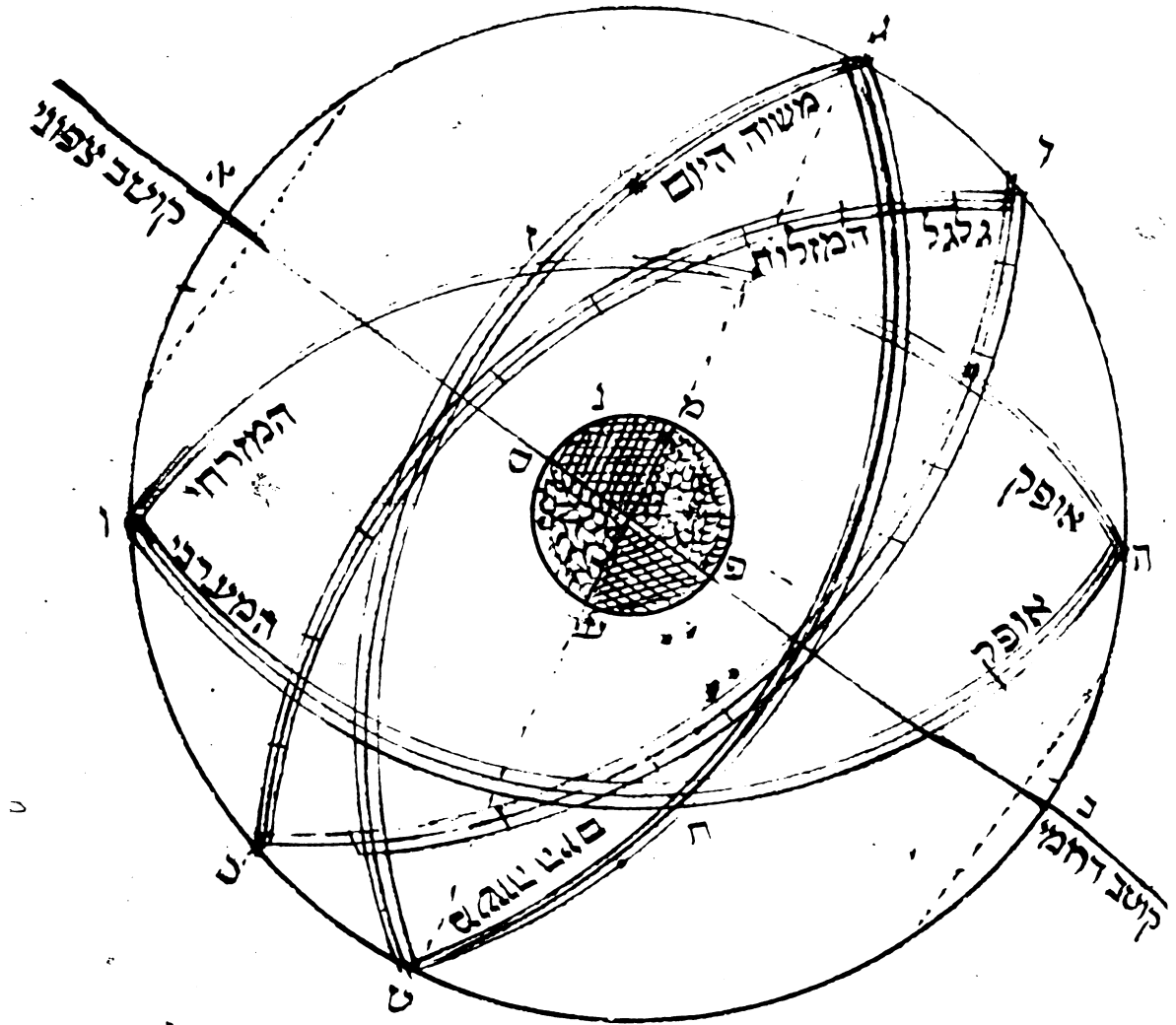
Appendix.

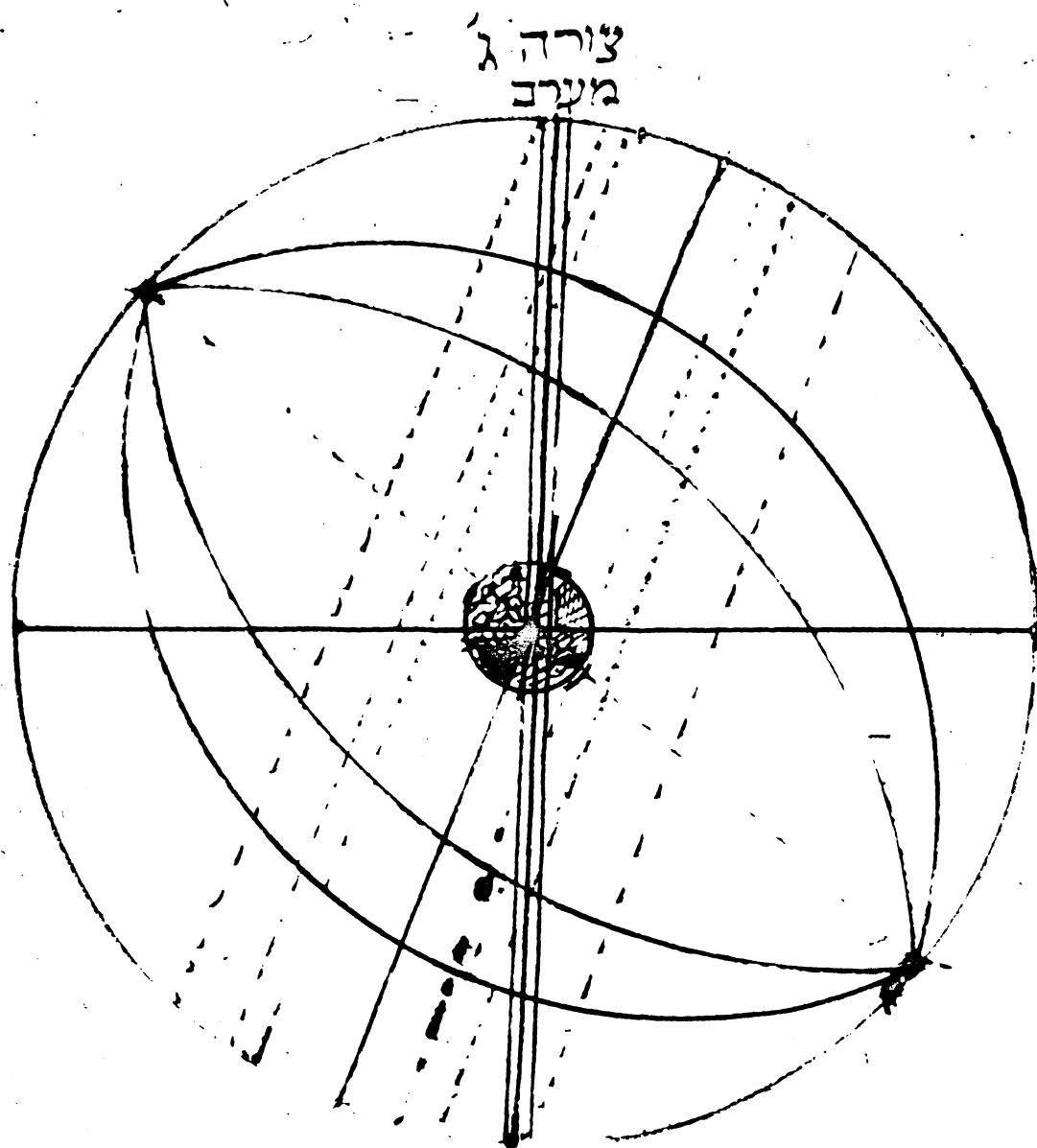
1. Facsimiles of two pages of the manuscript showing the difficulties met during the deciphering of the manuscript.
2. Facsimiles of twenty figures belonging to the manuscript and indispensable for the good understanding of the subject.

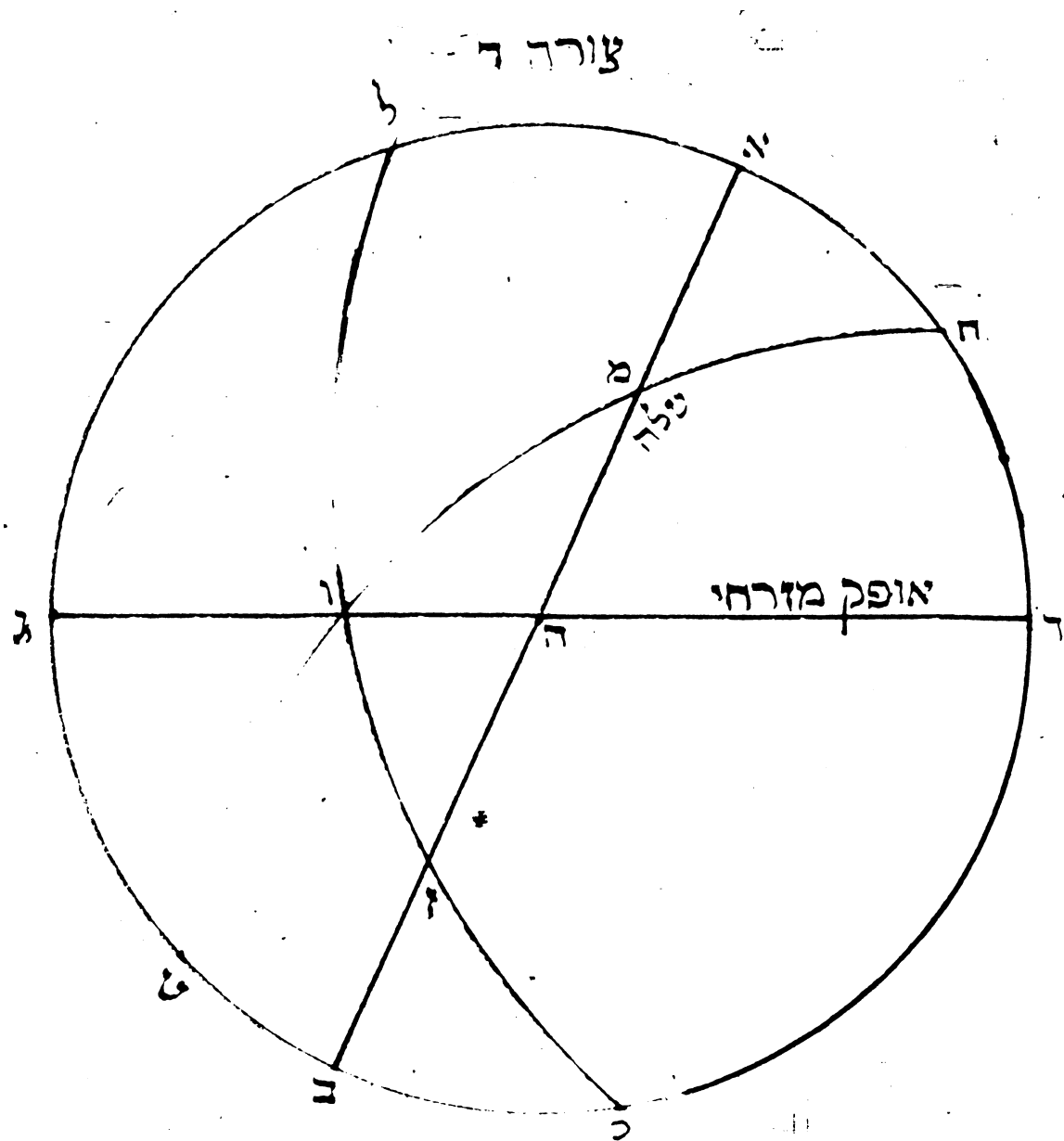
אחשבה ויהי

[illegible]

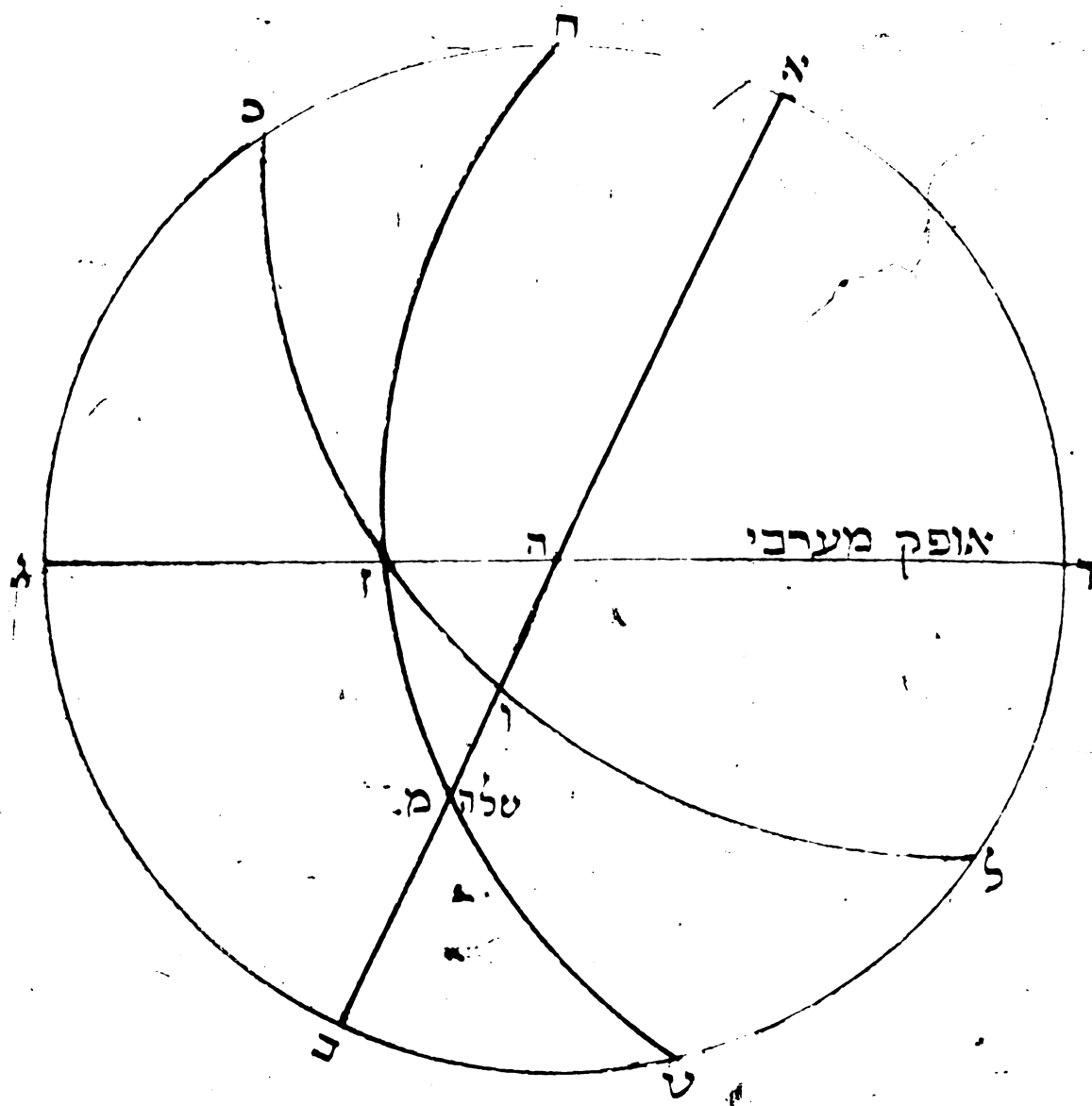
צורה א'



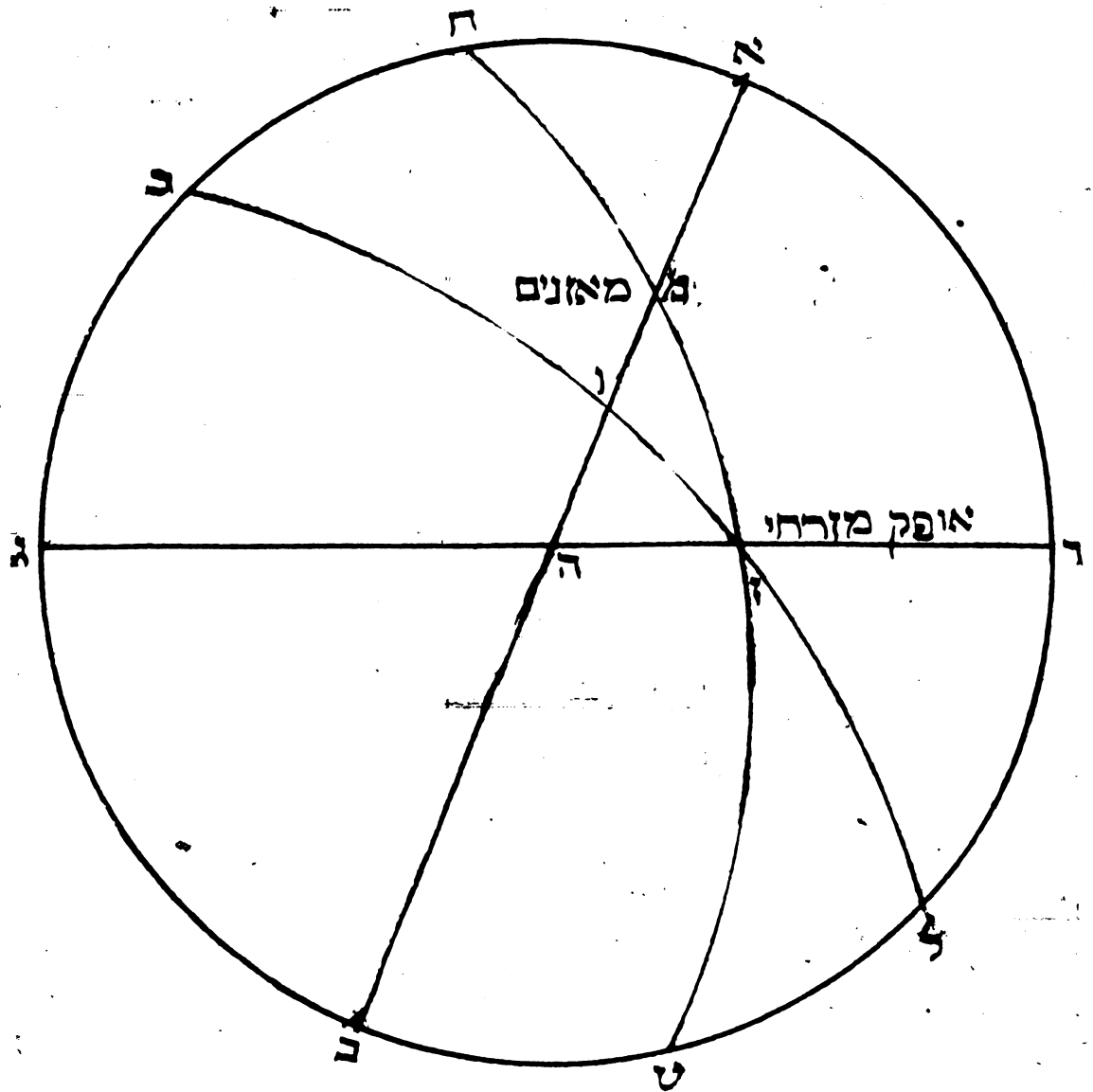




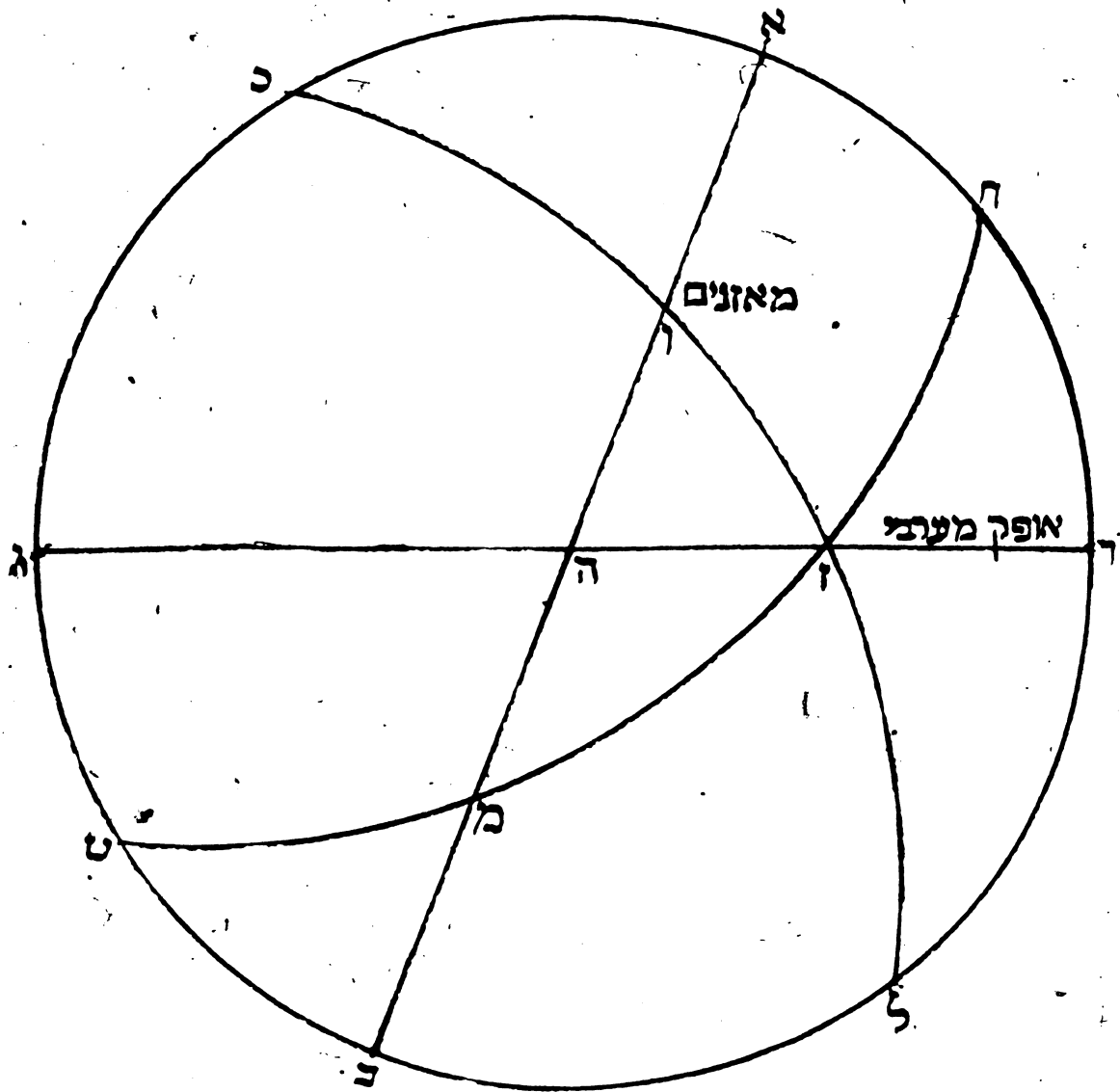
צורה ה'



צורה ו

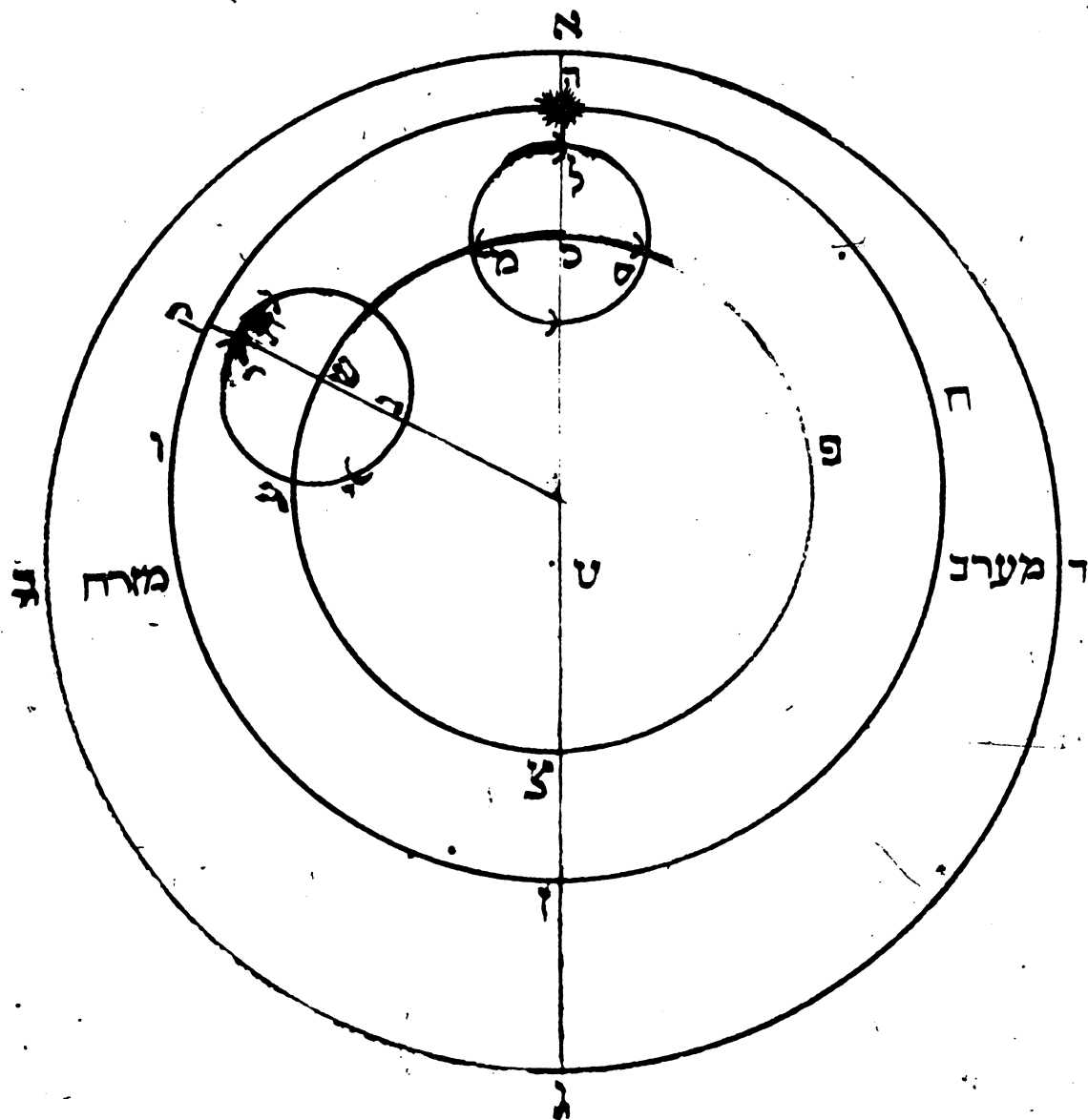


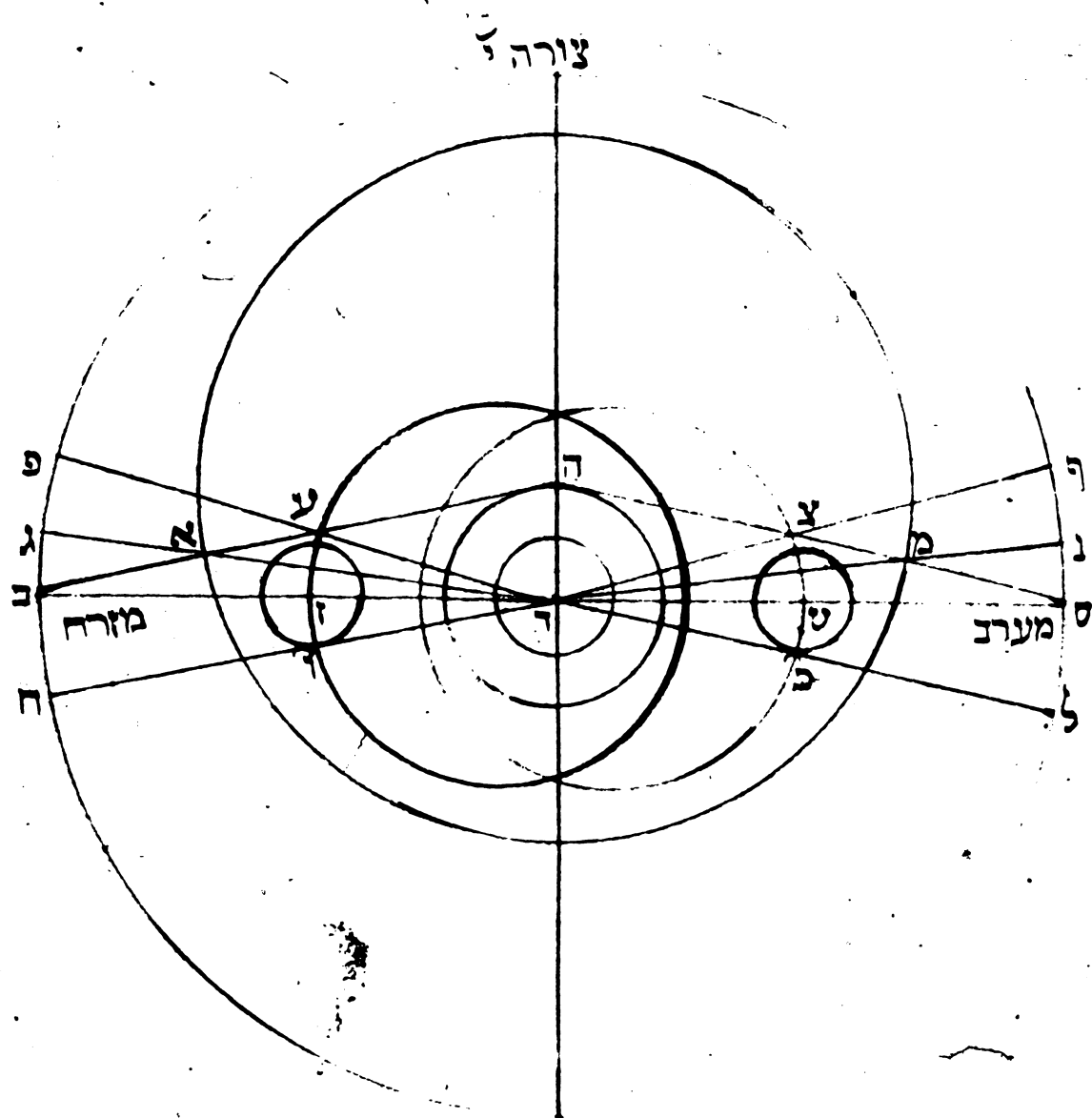
צורה ז'



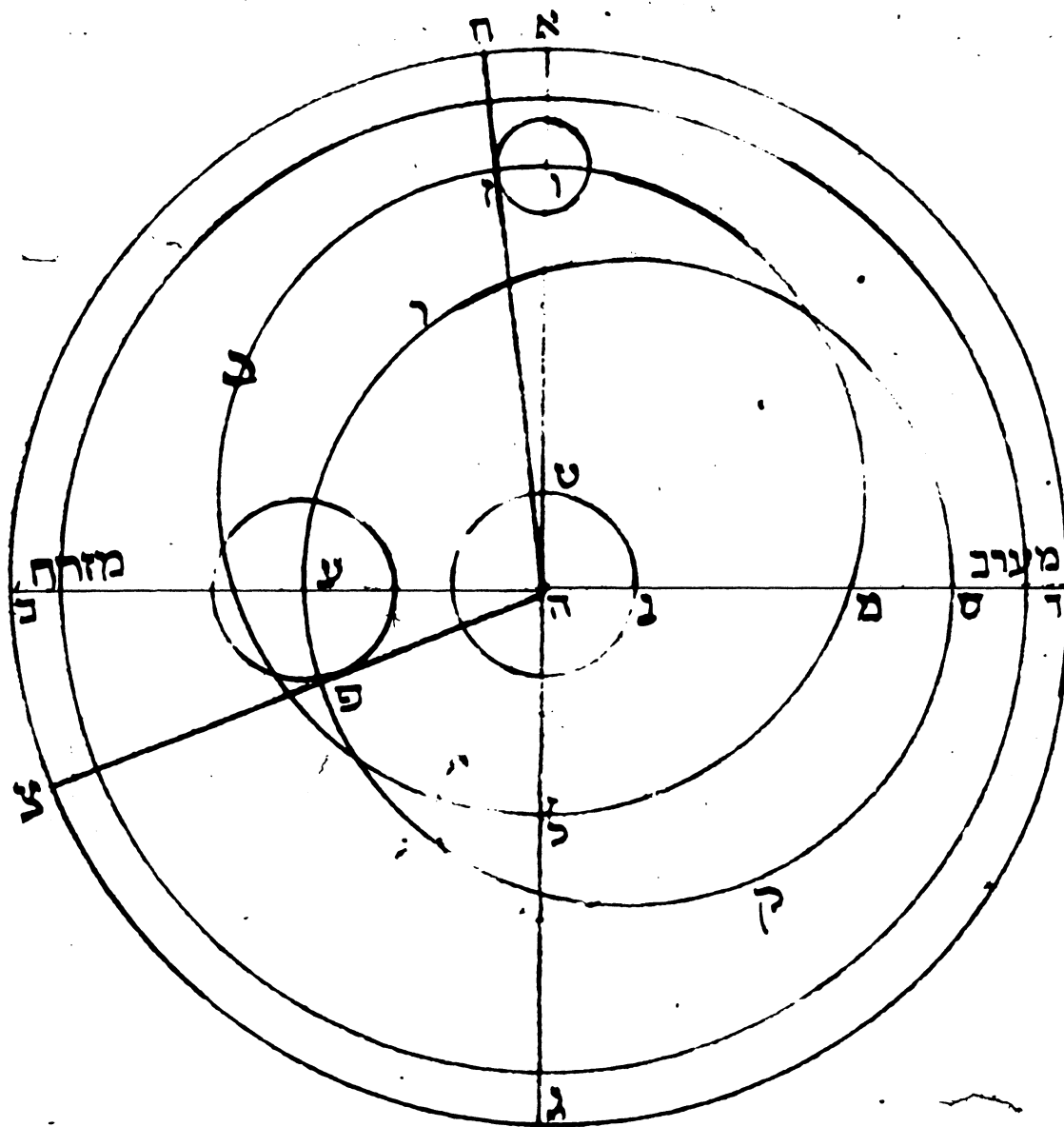


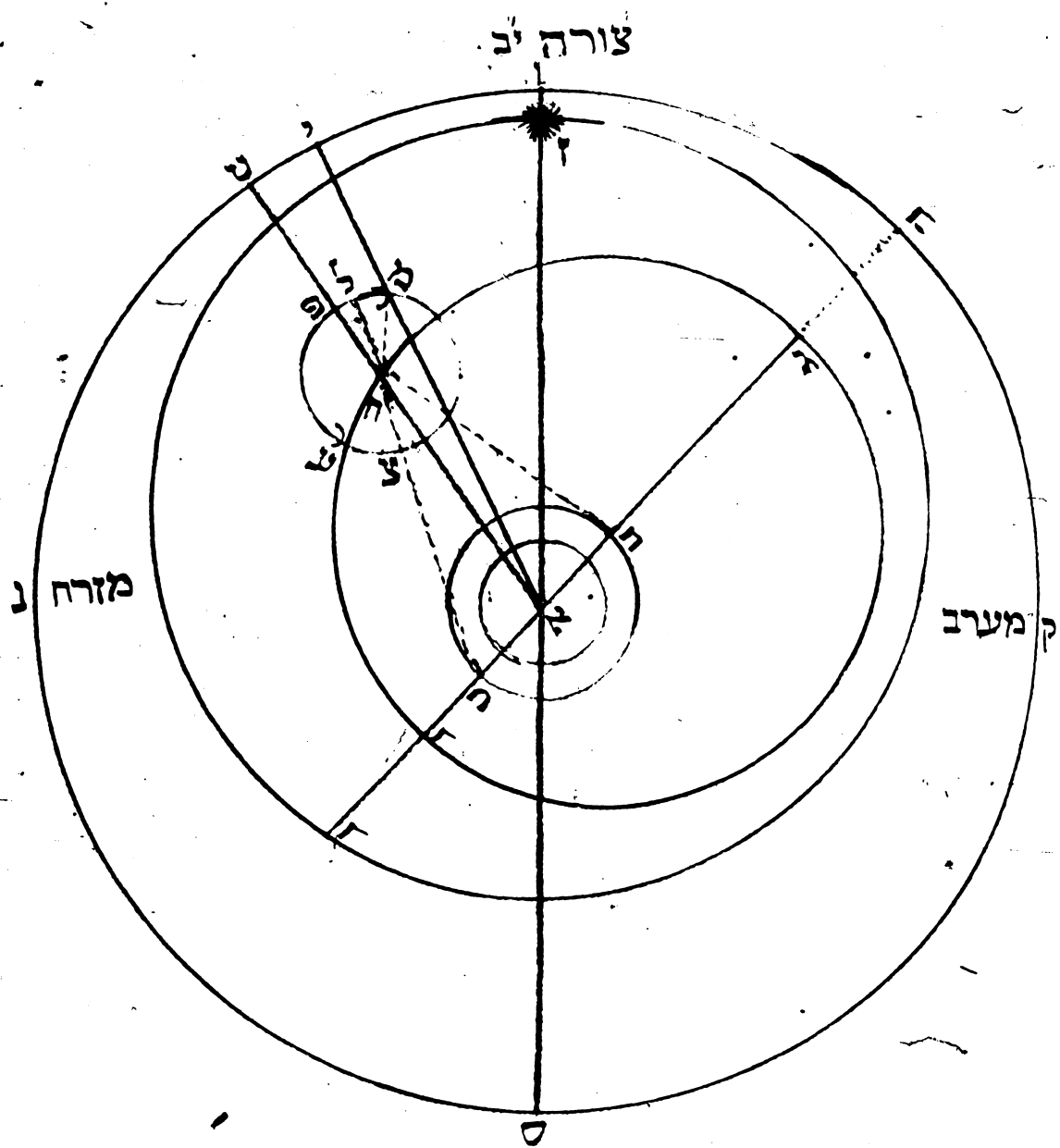
צורה ט



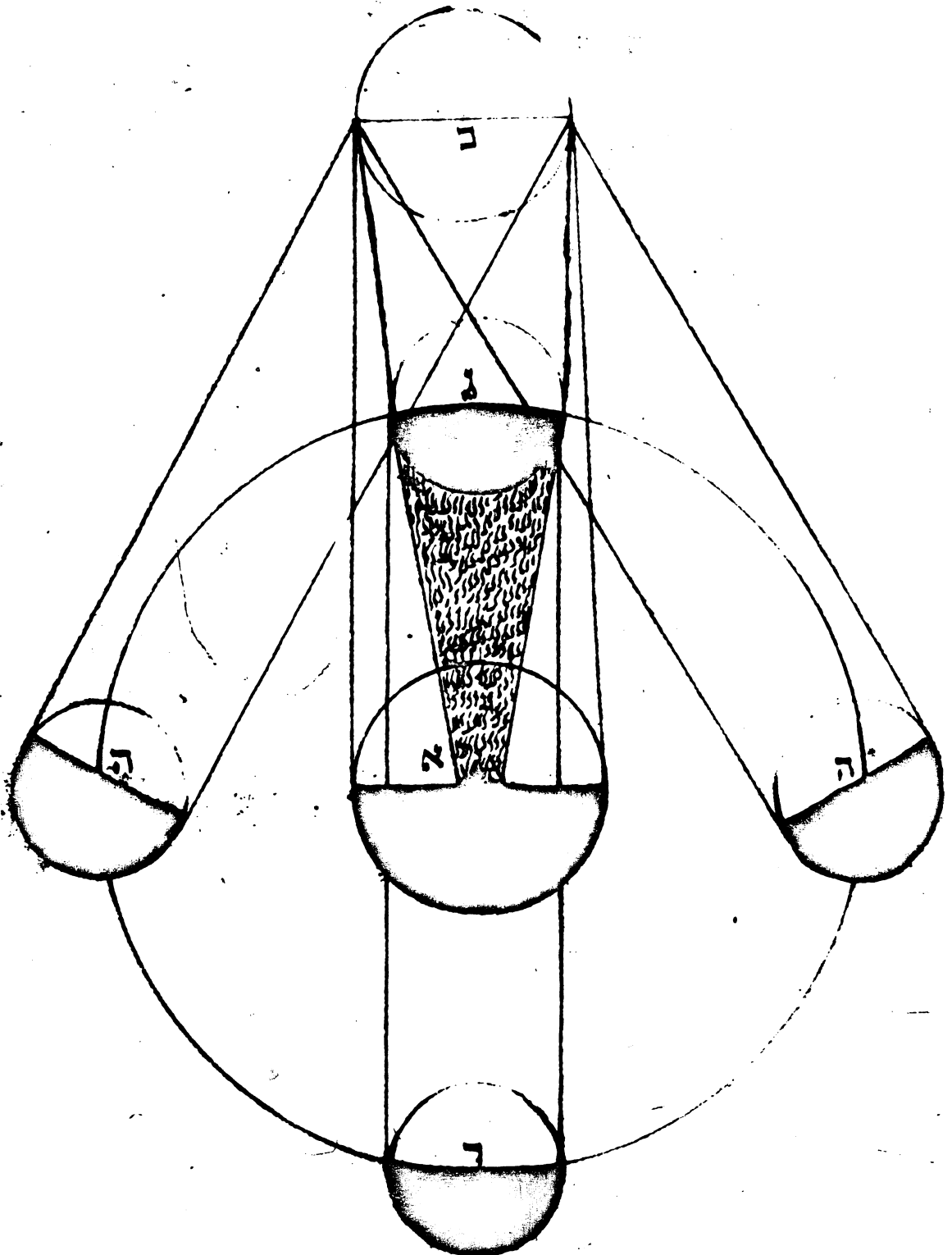


צורה יא



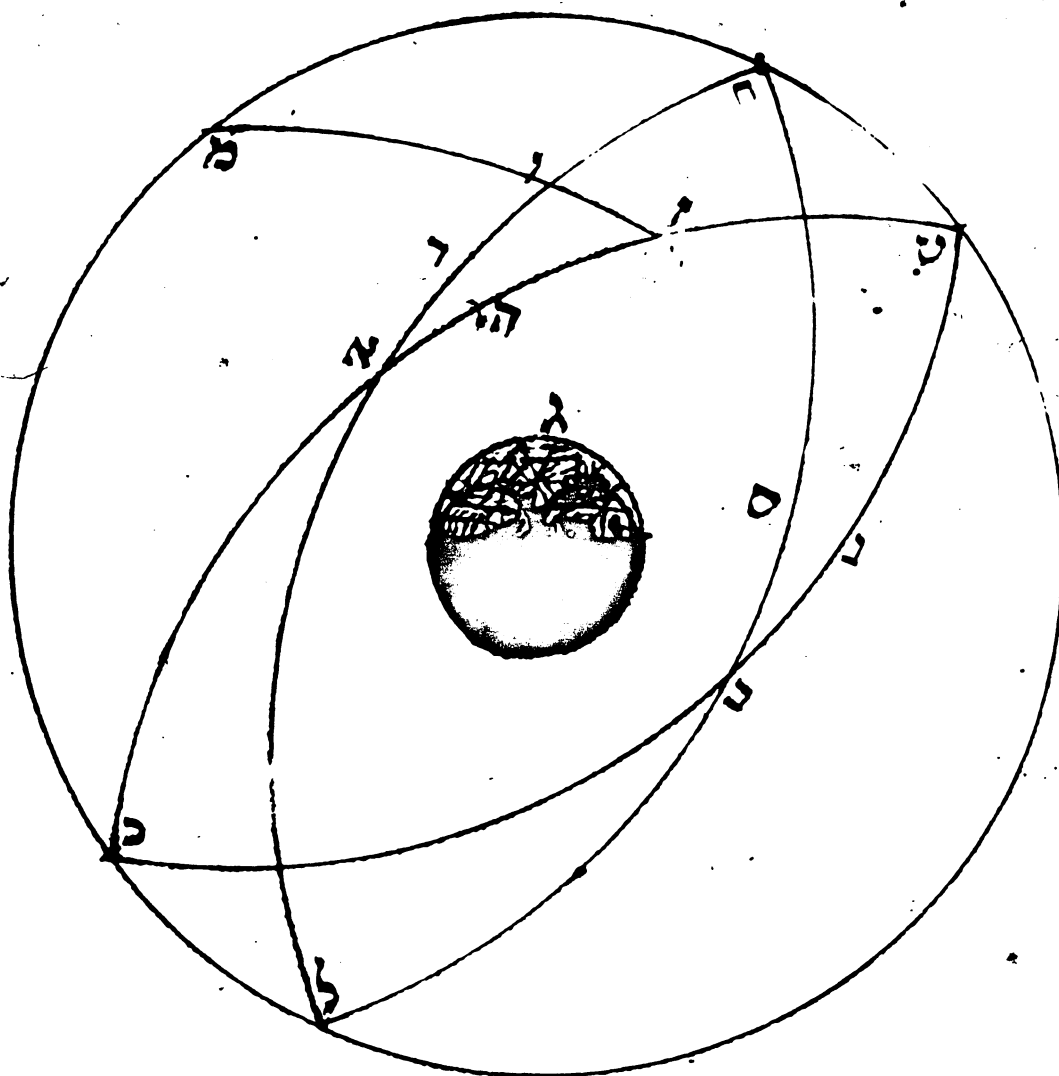


צורה יג

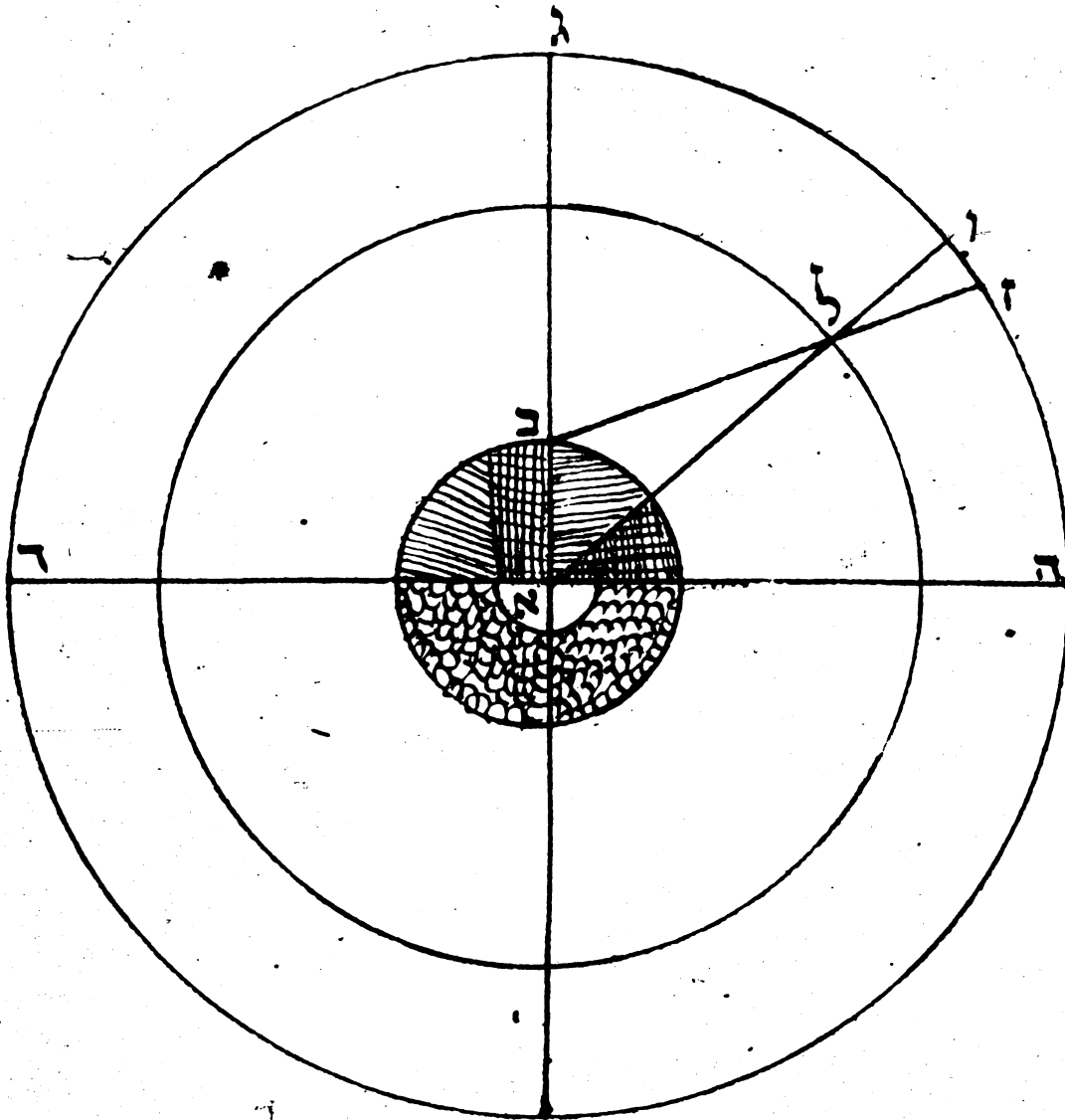


א ב

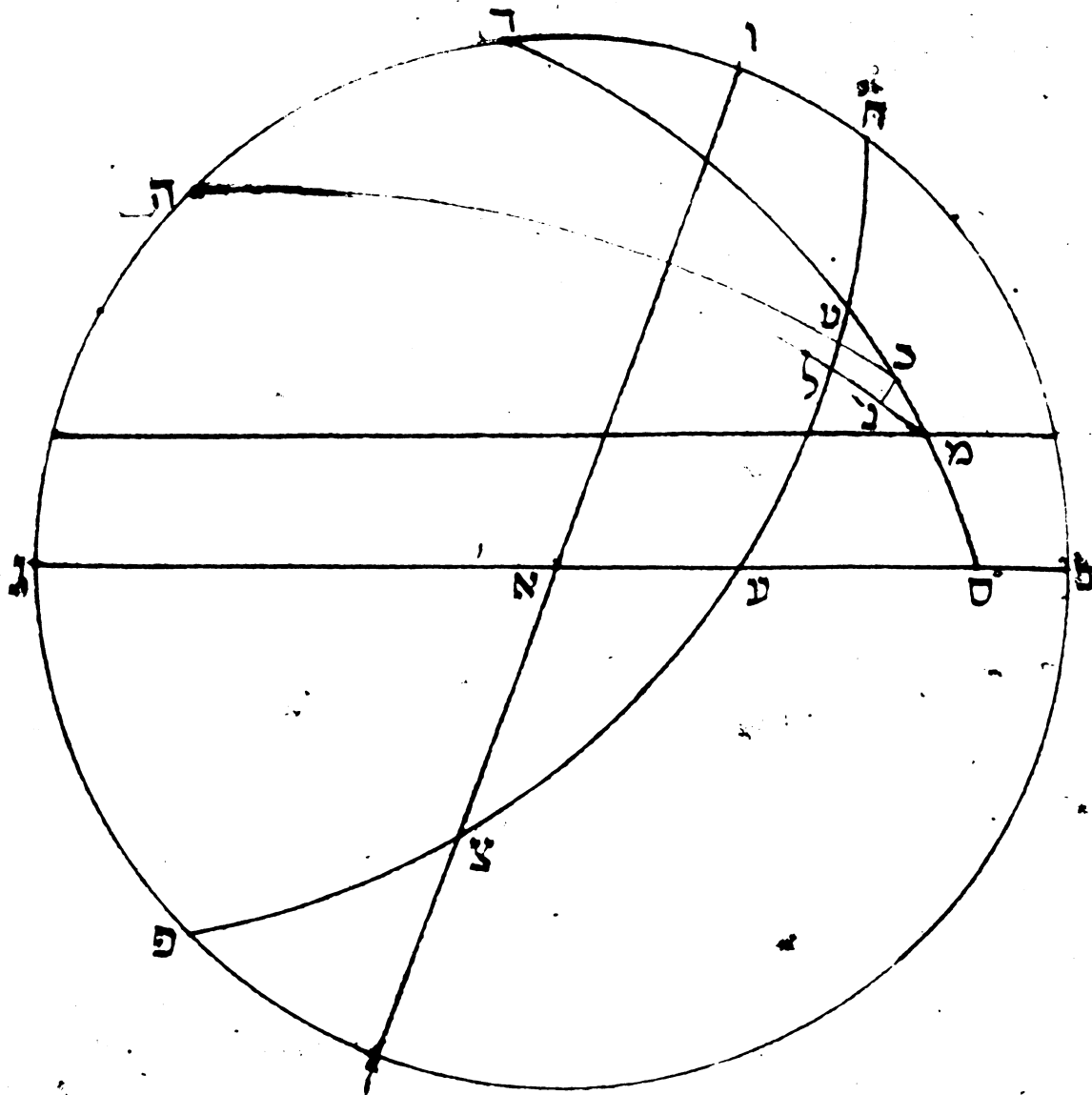
צורה י"ד



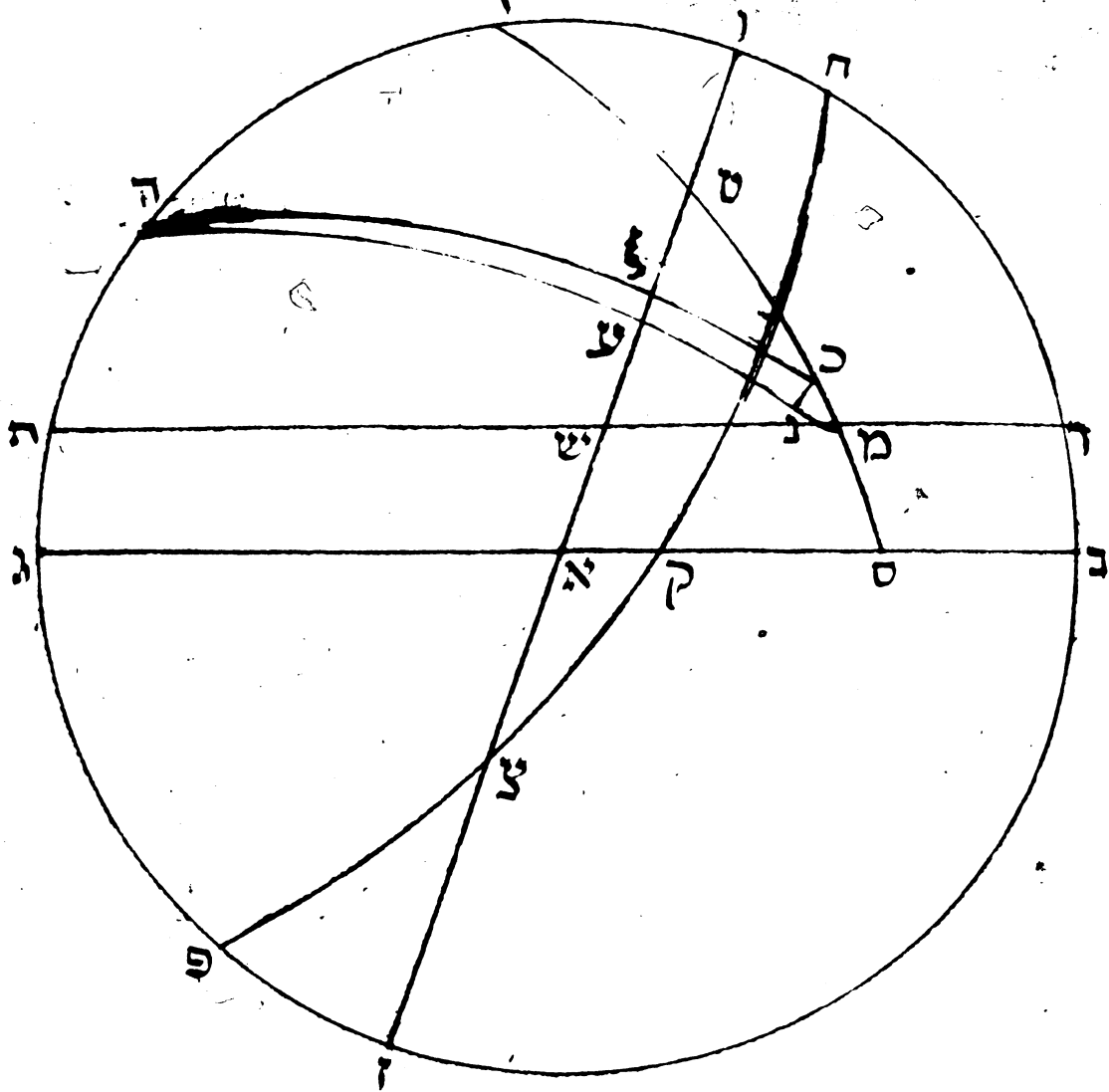
צורה טו



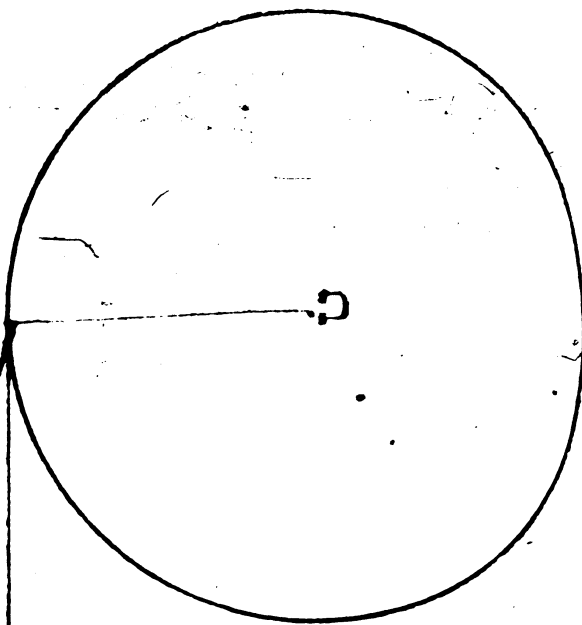
צורה י'



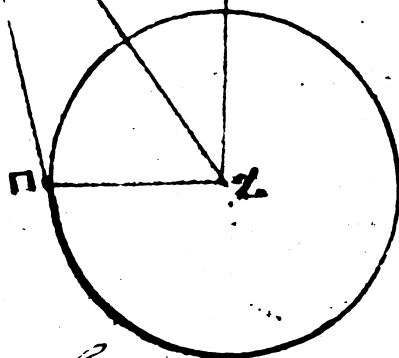
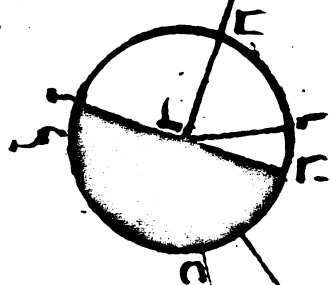
צורה י"ז



צורה יח

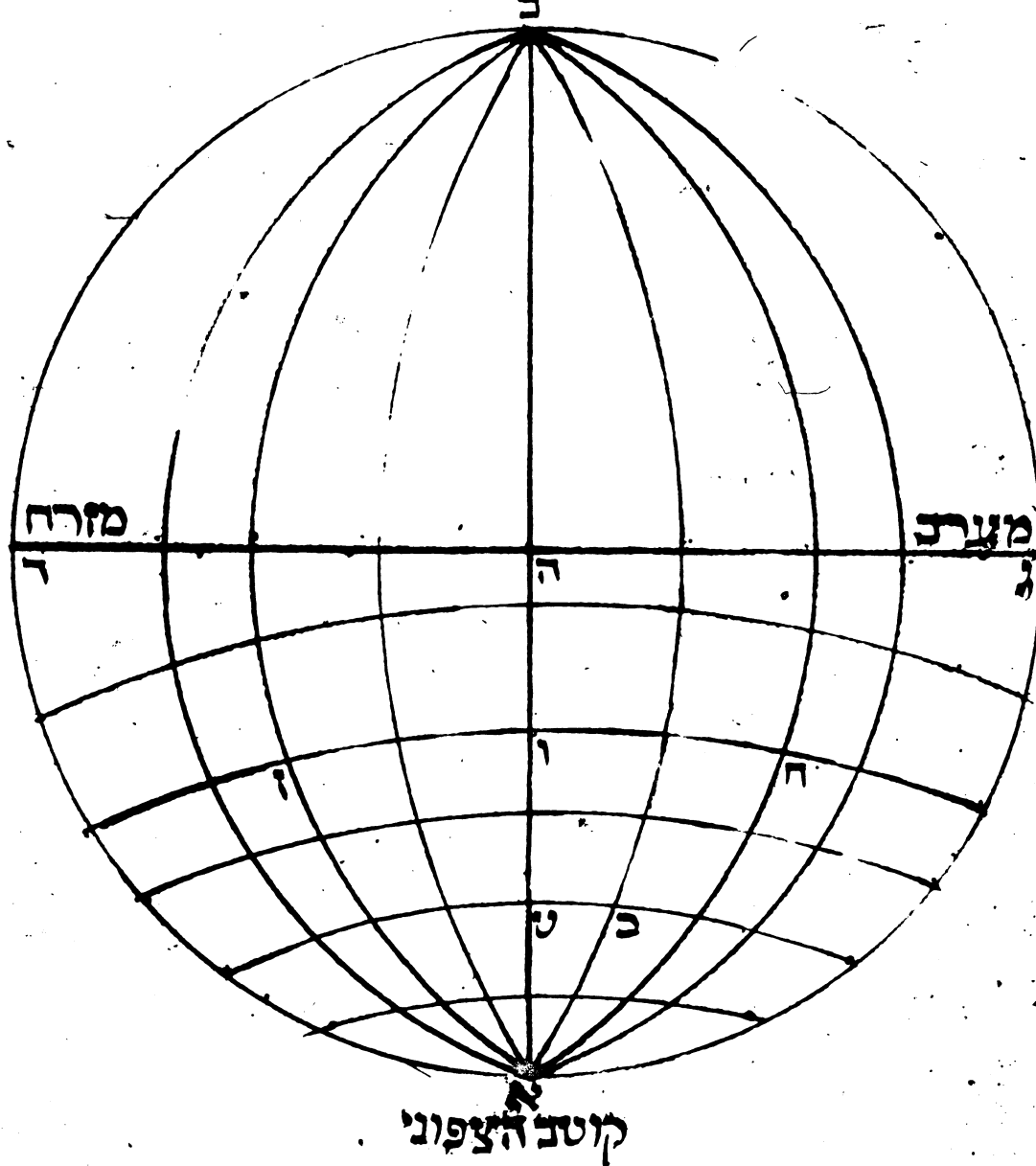


צורה יח



צורה יח

צורה יט
 קוטב הדרומי



צורה כ

